第一章　行列式

第一节　　二阶与三阶行列式

一、二阶行列式的引入

1.引例　解二元线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$

用消元法得：$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$,

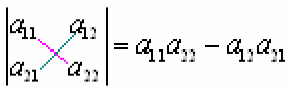
当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，方程组的解为$x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$　$, x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$.

将分母中四个数按其在方程组中出现的位置排成一个方形表　$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$

2.定义 1　表达式$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$称为数表$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$

确定的二阶行列式，并记作$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$。

数a_{ij} $(i = 1,2; j = 1,2)$称为行列式的元素。i 称为行标，j 称为列标，表明该元位于第 i 行、j 列。位于第 i 行、j 列的元素称为行列式的(i, j)元。

3.　**对角线法则**　

。红线上两元素乘积冠正号，绿线上两元素乘积冠负号。

4.　用行列式表示二元线性方程组的解:

这样，当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，二元一次方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$的解为:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

若记$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，称 D 为系数行列式，又记$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$　（注

意：D 与 D_1, D_2 间的关系。）则当 $D\neq 0$ 时，二元一次方程组有唯一解：

$x_1=\dfrac{D_1}{D}, x_2=\dfrac{D_2}{D}$。（注意解的表达式有规律）

例 1　解线性方程组 $\begin{cases}3x+4y=8\\2x+7y=5\end{cases}$

解　由于

$$\text{D}=13\neq 0,\quad D_1=36, D_2=-1,\quad \text{所以}\ x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{36}{13},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{13}.$$

注：1.行列式理论起源于解线性方程组，它在线性代数及其他数学分支中都有着广泛的应用。

2.二阶行列式的形成源于简化方程组解的表达形式。

二、三阶行列式

将二阶行列式的定义推广可得三阶行列式

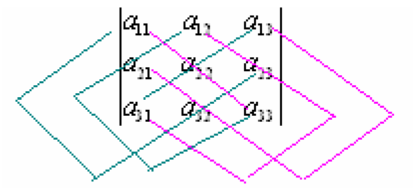
1.定义 2 设有九个数排成三行三列的数表

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix}\quad (1)\qquad \text{记}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, (2)$$

称（2）式为数表（1）确定的三阶行列式。

2. 对角线法则：



红线上三元素乘积冠正号，绿线上三元素冠负号。

注：对角线法则只适用于二、三阶行列式。

例 满足什么条件时有

$$\text{D}=\begin{vmatrix}a & b & 0\\ -b & a & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$$

解 按对角线法则,有

$\text{D}=a\bullet a\bullet 1+b\bullet 0\bullet 1+0\bullet(-b)\bullet 1-0\bullet a\bullet 1-a\bullet 0\bullet 0-b\bullet(-b)\bullet 1=a^2+b^2$

因此，当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，$D=0$。

问题：四阶行列式或 n 阶行列式如何展开？

3. 分析二、三阶行列式的展开式：

1)每项的构成：元素个数；元素取法。
2)总项数。
3)各项的符号。

三、小结

二、三阶行列式的定义　对角线法则

四、作业 $p_{26}1(2)(3)$

第二节　全排列及其逆序数

一、排列

引例 用数字1.2.3可以组成多少个没有重复数字的三位数？换言之：把1.2.3三个元素排成一列共有多少种排法？答：123　132　213　231　312　321。

定义3 由n个不同的数码1,2,…,n组成的有序数组$i_1 i_2 \ldots i_n$，称为一个n级全排列（简称排列）。用p_n表示所有排列的种数。引例中$p_3 = 6$。

问题：把n个不同元素排成一列有几种不同排法？　分析：

□	□	□…	□	□	□
↓	↓	↓	↓	↓	↓
n	n−1	n−2	3	2	1
种	种	种	种	种	种
放	放	放	放	放	放
法	法	法	法	法	法

共有$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$种排法。

例2 2341是一个四阶排列。　234不是排列。

二、逆序数

定义 4 在一个 n 级排列$i_1 i_2 \ldots i_n$中，如果有较大的数i_t排在较小的数i_s前面（$i_s \prec i_t$），则称i_t与i_s构成一个逆序。

逆序数：一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数。

计算逆序数的方法：分别计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和，即算出排列中每个元素的逆序数，每个元素的逆序数之和即为所给排列的逆序数。记为$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$。

例3　排列31425的逆序数为

$$\tau(31425) = \tau(3) + \tau(1) + \tau(4) + \tau(2) + \tau(5) = 0 + 1 + 0 + 2 + 0 = 3.$$

例4　排列1234…n的逆序数为0。此排列称为自然排列。

奇排列、偶排列

定义5 逆序数为奇数的排列叫奇排列，逆序数为偶数的叫偶排列。

思考题：计算下列排列的逆序数，并讨论它们的奇偶性

(1)　976845312;　　(2)n(n-1)(n-2)……321

(2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)……(k+1)k

(4)决定 i.j 的值，使 7i69j4213 为偶排列 ； 19ij23456 为奇排列。

(5)排列 n(n-1)(n-2)…..321 经过多少次相邻两数对换变成自然排列？

注 (2)、(3)中注意讨论各种情况。

三、小结

1、排列、逆序的概念

2、逆序数及求法

四、作业 p_{26}2(4)(6)

第三节 n 阶行列式的定义

一、概念的引入

分析三阶行列式的展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

(1)共有 3!=6. (2)每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积。 (3)当行标为自然排列时每项的正负号都取决于三个元素的列下标排列的奇偶性。.

例如 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 列下标排列 312 的逆序数为 $\tau(312)=2$，偶排列取“＋“号；

$a_{11}a_{23}a_{32}$ 列下标排列 132 的逆序数为 $\tau(132)=1$，奇排列取负号。故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1,p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1,p_2,p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

二、n 阶行列式的定义

定义 6 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$，得到形如 $(-1)^{\tau(p_1,p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}.....a_{npn}$（3）的项，其中 $p_1p_2...p_n$ 为自然数 123…n 的一个排列，$\tau(p_1p_2...p_n)$ 为这个排列的逆序,由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如（3）式的项共有 $n!$ 项。所有这 $n!$ 项的代数和称为 n 阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1,p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1,p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\dots a_{ip_i}\dots a_{npn}$$，简记作 $\det(a_{ij})$。称 a_{ij} 为 $\det(a_{ij})$ 的元素。$\sum\limits_{p_1,p_2\cdots p_n}$ 表示对所有排列 $p_1p_2\dots p_n$ 求和。

说明

1.行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的；

2.n 阶行列式是 n!项的代数和，当行标为自然排列时正负号由列下标排列的逆序数的奇偶性决定；

3.n 阶行列式的每项都是位于不同行不同列 n 个元素的乘积；

4.一阶行列式 $|a|=a$ 不要与绝对值记号相混淆。

5.一行列式若有一行或一列中的元素皆为零，则此行列式必为零。

例 5 下列乘积项中，哪些可以构成相应阶行列式中的项？

1) $-a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{51}$；　　2) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$

解 1) 不能。 乘积项中有两个第一列的元素。

2)可以构成。重排为 $a_{12}a_{23}a_{36}a_{45}a_{54}a_{61}$　$\because \tau(236541)=8$　故该项符号为正。

定理 1 行列式的等价定义：n 阶行列式还可以定义为 $D=\sum\limits_{(p_1\cdots p_n)}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{p_11}\dots a_{p_nn}$，

式中把列标排成了一个自然排列。

三．几种特殊的行列式

1) 主对角线行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\dots\lambda_n$$

证 设 $$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\dots a_{np_n}=(-1)^{\tau(12\dots n)}a_{11}a_{22}\dots a_{nn}=\lambda_1\dots\lambda_n。$$

2) 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \therefore & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \therefore & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n,n-1......1)} a_{1n}a_{2,n-1}...a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1\lambda_2...\lambda_n \text{。}$$

3) 下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

分析 考虑行列式乘积项 $(-1)^{\tau(p_1,p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}.....a_{npn}$ 中的非零项：

$a_{1p_1} = 0(p_1 \succ 1),取 p_1 = 1$；

$a_{1p2} = 0(p_2 \succ 2),取 p_2 = 2;$

……

$a_{n-1,pn-1} = 0(p_{n-1} \succ n-1),取 p_{n-1} = n-1;$

$p_n = n$

解 $D = (-1)^{\tau(12...n)} a_{11}a_{22}...a_{nn} = a_{11}a_{22}...a_{nn}$ 。

4) 上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ & a_{22} & ... & a_{2n} \\ & & ... & ... \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn} \text{。}$$

例 6 计算 $D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & e & f & h \end{vmatrix}$

解 四阶行列式的通项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 共有 $4! = 24$ 项，它的非零项有四项，故 $D = (-1)^{\tau(1234)}acfh + (-1)^{\tau(1324)}adeh + (-1)^{\tau(4231)}bcfg + (-1)^{\tau(4321)}b\deg$

$= acfh + -adeh + -bcfh + bdeh$ 。

思考 1.若 $D = \det(a_{ij}) = a$ ，则 $D^{'} = \det(-a_{ij})$ =___________.

2.由 $D=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 求 x^4 与 x^3 的系数。

四、小结

1、n 阶行列式的定义（其展开式的三个特点）。

2、几种特殊行列式。

3、可直接用定义计算的行列式的类型。

五、作业 $p_{26}3$

第四节 对换

定义 7 在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫对换。将相邻两个元素对换，叫做相邻对换。

例如 $a_1 \ldots a_l a b b_1 \ldots b_m$ 对换 a, b 变为 $a_1 \ldots a_l b a b_1 \ldots b_m$；

$a_1 \ldots a_l a c_1 \ldots c_n b b_1 \ldots b_m$ 对换 a, b 变为 $a_1 \ldots a_l b c_1 \ldots c_n a b_1 \ldots b_m$。

定理 2 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性。

推理 奇排列调成自然排列的对换次数为奇数。

偶排列调成自然排列的对换次数为偶数。

第五节 行列式的性质

一．转置行列式

$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 D= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的转置行列式。

二．行列式的性质

性质一 行列式与它的转置行列式相等。

证明 设 $D^T=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$ 则 $b_{ij}=a_{ji}(i, j=12 \ldots n)$ 由行列式的定义知

$D^T=\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} b_{1 p_1} b_{2 p_2} \ldots b_{n p_n}=\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \ldots a_{p_n n}$ 由行列式的等价定义知 $D^T=D$。

注 此性质表明，在行列式中的行与列具有同等的地位，对行成立的性质，对列也成立，反之亦然。

性质二 互换行列式的两行（列），行列式变号。

利用行列式的定义可证得性质二。

推论 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式等于零。

证明 将这相同的两行互换，有 D= -D 故 D=0.

性质三 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式，

即$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$＝k$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

证明 左边 $\sum\limits_{p_1,p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1,p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\ldots ka_{ip_i}..a_{npn}$＝

$k\sum\limits_{p_1,p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1,p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\ldots a_{ip_i}..a_{npn}$＝右。

规定 以r_i表示行列式的第 i 行，c_i表示第 j 列。交换 i,j 两行记作$r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i,j 两列记作$c_i \leftrightarrow c_j$。第 i 行（或列）乘以 k，记作$r_i \times k$（或$c_i \times k$）.

推论 行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面。

第 i 行（或列）提出公因子 k，记作$r_i \div k\,(c_i \div k)$.

例 7 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} \overset{r_2 \div 6}{=\!=\!=} 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{c_2 \div 2}{=\!=\!=} 6\bullet 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$。

性质四 若行列式中有某两行对应元素成比例，则此行列式为零。

注 利用性质三与推理证明。

例 8 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}$

解 因第一列与第二列对应元素成比例，据性质四知，D=0.

例 9 已知$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$＝1，求$D=\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{11} & a_{12} & ka_{13} \end{vmatrix}$。

解 $D \overset{c_3 \div k}{=\!=\!=\!=} k\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_3}{=\!=\!=\!=} -k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$=－k.

性质五 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和，则此行列式可以写成两个行列式的和，

即 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots(a_{1i}+a_{1i'})\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots(a_{2i}+a_{2i'})\ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots(a_{ni}+a_{ni'})\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots a_{1i}\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots a_{2i}\ldots\ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots a_{ni}\ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ＋

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots a_{1i'}\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots a_{2i'}\ldots\ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots a_{ni'}\ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 左＝$\sum\limits_{p_1,p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1,p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\ldots(a_{ip_i}+a_{ip_i'})\ldots a_{npn}$

＝$\sum\limits_{p_1,p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1,p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\ldots a_{ip_i}\ldots a_{npn}$ ＋ $\sum\limits_{p_1,p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1,p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\ldots a_{ip_i'}\ldots a_{npn}$ ＝右

注 若 n 阶行列式每个元素都可表示成两数之和，则它可分解成 2^n 个行列式之和。

例 9 $\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+y \\ c & d+w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b+y \\ z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$

例 10 证明 $\begin{vmatrix} x+y & z & -x \\ x+z & y & -z \\ y+z & x & -y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & z \\ x & z & y \\ z & y & x \end{vmatrix}$。

证 左＝$\begin{vmatrix} x+y & z & -x \\ z+x & y & -z \\ y+z & x & -y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & z & -x \\ z & y & -z \\ y & x & -y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & z & -x \\ x & y & -z \\ z & x & -y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & z \\ x & z & y \\ z & y & x \end{vmatrix}$。（注意此处第一列两数之和的拆法）

性质六 行列式的某一列（行）元素加上另一列（行）对应元素的 k 倍，行列式不变，即 $i \neq j$ 时 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \ldots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$

证 由性质五知

左$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$而根据性质四，上式第二个行列式为零，即得左＝右。

三、**例题**（性质的应用）

例 11 计算 $D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_1 & 3+a_1 \\ 1+a_2 & 2+a_2 & 3+a_2 \\ 1+a_3 & 2+a_3 & 3+a_3 \end{vmatrix}$。

解 $D \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 2 \\ 1+a_2 & 1 & 2 \\ 1+a_3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

例 12 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$。

解 $D \xlongequal[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+2r_2]{r_3-r_4} \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_4+17r_3} \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{vmatrix} = 1\times(-13)\times(-1)\times(-24) = -312。$$

注 计算行列式时，常先用性质六将行列式化为上三角行列式，从而算得行列式的值。此法计算过程完全格式化，因此对于阶数较高的数字行列式可利用计算机来计算其值。

思考题 计算

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_1 & 3+a_1 & \cdots & n+a_1 \\ 1+a_2 & 2+a_2 & 3+a_2 & \cdots & n+a_2 \\ 1+a_3 & 2+a_3 & 3+a_3 & \cdots & n+a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+a_n & 2+a_n & 3+a_n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}。$$

例 13 计算$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$。

解法一

$$D \xlongequal{c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1\div[a+(n-1)b]} a+(n-1)b \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$D \xlongequal[\substack{\vdots \\ r_n-r_1}]{r_2-r_1} a+(n-1)b \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}。$$

注 该例为一个 n 阶字母型行列式，计算字母行列式需要针对具体问题应用相应的技巧。这行列式特点为每一行（列）的元素之和相同。今后凡遇此类行列式均可利用此方法来计算。

解法二

$$D \xlongequal[\substack{\vdots \\ r_n-r_1}]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a & 0 & & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_1+\sum_{j=2}^{n}c_j]{} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}。$$

例 14 计算

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}.$$

解 从第四行开始，后行减前行

$$D\overset{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2\\ r_2-r_1}}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}\overset{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2}}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_3}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4\text{。}$$

注 上述诸例中都有几个运算写在一起的省略写法，要注意各个运算次序一般不能颠倒。

例 15 奇数阶反对称行列式为零。$(a_{ij}=-a_{ji},a_{ii}=0)$

如 $D=\begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

即 D=－D ，故 D=0.

例 16 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$ $D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$ 证明 $D=D_1D_2$。

证 对 D_1 作 r_i+kr_j 运算，把 D_1 化为下三角形行列式，设为

$D_1=\begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\ldots p_{kk}$； 对 D_2 作 c_i+kc_j 运算，把 D_2 化为下三角形行列

式，设为$D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\ldots q_{nn}$ 。于是，对 D 的前 k 行作r_i+kr_j运算，对 D 的后 n 列作c_i+kc_j运算，把 D 化为下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}$$ 故

D= $p_{11}\ldots p_{kk}\ q_{11}\ldots q_{nn}=D_1D_2$。

例 17 计算 2n 阶行列式

$$D_{2n}=\begin{pmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & ⋰ & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & ⋰ & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{pmatrix}$$其中未写出的元素为零。

解 把D_{2n}中的第 2n 行依次与第 2n-1 行、…、第 2 行对调（作 2n-2 次相邻对换），再把第 2n 列依次与 2n-1 列、…、第 2 列对调，得

$$D_{2n}=(-1)^{2(2n-2)}\begin{pmatrix} a & b & 0 & & \cdots & \cdots & & 0 \\ c & d & 0 & & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & a & & & & & b \\ & & & \ddots & & & ⋰ & \\ \vdots & \vdots & & & a & b & & \\ \vdots & \vdots & & & c & d & & \\ & & & ⋰ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & c & & & & & d \end{pmatrix}$$根据上例的结果，有

$D_{2n}=D_2D_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-1)}$。以此作递推公式，即得

$$D_{2n}=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}=\ldots=(ad-bc)^{n-1}D_2 \\ =(ad-bc)^n$$ 。

注 行列式的计算是本节、本章乃至整个线性代数部分中的难点、重点。计

算行列式的方法很多，具体到每一题要针对其特征选取适当的方法求解。一把钥匙开一把锁。

四、小结

1、转置行列式的定义。

2、行列式的六个性质及应用。

3、三角化法的解题技巧。

五、作业　$p_{26}4(1)(3),5(2)(3),6$

第六节　行列式按行（列）展开

一.　余子式　代数余子式

定义 在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 n-1 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式。

例 18　$D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 34 & 4 \end{vmatrix}$　中的元素 a_{23} 的余子式和代数余子式分别为

$M_{23}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 34 \end{vmatrix}$，$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 34 \end{vmatrix}=-M_{23}$。

二.行列式与代数余子式的关系

引理 在 n 阶行列式中，若第 i 行元素除 a_{ij} 外都为零，那么这行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$

证明　先证 a_{ij} 位于第一行第一列的情形，此时 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 这是例 16 中当 $k=1$ 时的特殊情形，按例 16 的结论，即有 $D=a_{11}M_{11}$. 又 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$,从而 $D=a_{11}A_{11}$

再证一般情形，此时 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

为了利用前面的结论，把 D 的行列式作如下调换：把 D 的第 i 行依次与第

i-1 行、第 i-2 行、…、第 1 行对调，这样 a_{ij} 就调到原来 a_{1j} 的位置上，调换的次数为 i-1。再把第 j 列依次与第 j-1 列、第 j-2 列、…、第 1 列对调，这样 a_{ij} 就调到左上角，调换的次数为 j-1，总之，经 i+j-2 次调换，把 a_{ij} 调到左上角，所得的行列式 $D_1=(-1)^{i+j-2}D=(-1)^{i+j}D$，而元素 a_{ij} 在 D_1 中的余子式仍然是 a_{ij} 在 D 中的余子式 M_{ij}。

由于 a_{ij} 位于 D_1 的左上角，利用前面的结果，有 $D_1=a_{ij}M_{ij}$，于是 $D=(-1)^{i+j}D_1=(-1)^{i+j}\ a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$。

三．行列式按行（列）展开

定理 3　行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即 $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+......+a_{in}A_{in}(i=1,2......n)$，

或 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+......+a_{nj}A_{nj}(j=1,2......n)$。

证　$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\dots+0 & 0+a_{i2}\dots+0 & \dots & 0+\dots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

根据引理，即得 $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+......+a_{in}A_{in}(i=1,2......n)$。

类似地，可得 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+......+a_{nj}A_{nj}(j=1,2......n)$。

注　此定理叫行列式按行（列）展开法则，该法则是把高阶行列式的计算化为低阶行列式计算的重要工具，从而得到计算行列式的另一种基本方法－－降阶法。

推论　行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零。

即 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+......+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$ 或 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+......+a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j)$

证 考虑行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{r_i+r_j}{====} D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

两边行列式都按第 i 行展开，得 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+a_{jk})A_{ik}$ 。移项化简，得

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=0(i\neq j)$ 。同理可证另一式。

综上可得下述重要公式 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D, i=j, \\ 0, i\neq j. \end{cases}$ 。 $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D, i=j, \\ 0, i\neq j. \end{cases}$

注 结合该法则及行列式的性质可以简化行列式的计算。

例 18 已知 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，求 $M=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$。

解 将 D 按第一列展开得 $D=aA_{11}+0A_{21}+0A_{31}+0A_{41}=aM$ ，所以 $M=\frac{1}{a}$ 。

注 直接应用定理只是把一个 n 阶换成 n 个 n-1 阶行列式，计算量不一定减少多少，而当某行（列）含有较多零时，应用定理才真正有意义。因此，可先利用行列式的性质，使之某一行（列）中有较多的零，再按该行（列）展开。

例 19 计算 $D=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$。

解 保留 a_{24}，把第 2 行其余元素变为零，然后按第 2 行展开：

$$D \overset{c_1+c_4}{\underset{c_3+c_4}{====}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=(-1)^{2+4}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_2-4r_1}{=====} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{2+1}(-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1。$$

注 注意符号。特别不要把代数余子式混同于余子式而遗漏了符号。

例 20 证明范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \dots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \dots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \ge i \ge j \ge 1} (x_i - x_j)$$

证 对 n 用数学归纳法，n=2 时 $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \ge i \ge j \ge 1} (x_i - x_j)$。所以结论成立。

假设 n-1 阶时结论成立，即 $D_{n-1} = \prod_{n-1 \ge i \ge j \ge 1} (x_i - x_j)$。

下证 n 阶范德蒙行列式也成立。

设法把 D_n 降阶：从第 n 行起，后行减去前行的 x_1 倍，有

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & {x_2}^{n-2}(x_2 - x_1) & \dots & {x_n}^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第一行展开，并把每列的公因子 $(x_i - x_1)$ 提出，就有

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$ 此式右端的行列式是 n－1 阶范德蒙行列式，按归纳法假设，它等于所有 $(x_i - x_j)$ 因子的乘积，其中 $n \ge i \succ j \ge 2$。故 $D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \prod_{n \ge i \succ j \ge 2} (x_i - x_j) = \prod_{n \ge i \succ j \ge 1} (x_i - x_j)$。

注 范德蒙行列式的结果应牢记，以后可直接用。

四、目前已学过的计算行列式的方法：

用定义（适用于有很多零元）；

化为“三角形”行列式计算（用性质）；

利用典型字母型行列式计算；

利用奇数阶反对称行列式为零；

行列式按行（列）展开法则；

利用递推公式；

利用范德蒙行列式；

利用数学归纳法。

注 行列式的计算没有统一方法。在计算前应认真观察行列式元素间的关系，采用相应的方法来计算。

思考题 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 0 \end{vmatrix}。$$

五、小结

1、余子式、代数余子式的概念。

2、行列式展开定理及其应用。

3、七种计算行列式的方法。

六、作业 $p_{27}5(4)(5),7(2)(4)(6)$

第七节 克莱姆法则

一.复习二元线性方程组解的形式

二．**克莱姆法则**：如果线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ (1) 的系数行列式 $D \neq 0$，那么，方程组 (1) 有唯一解。$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots\dots x_n = \frac{D_n}{D}$。(2)

其中 $D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} (j = 1 \dots n)$ （**注意** D_j 的特点）。

证明 1.先证明若(1)有解，其解必为(2)

用消元法，除 x_1 外，其余 n-1 个未知数的系数都化为零。为此，在第一个方程的两边乘以 A_{11}；第二个方程的两边乘以 A_{21}……；第 n 个方程的两边乘以 A_{n1}，然后相加即得：$Dx_1 = D_1$。同理，可得 $Dx_j = D_j (j = 2,3\dots\dots n)$，这样有方程组

$$Dx_j = D_j (j = 1,2\dots\dots n) \ (3).$$

当 $D \neq 0$ 时，(3)有唯一解(2)。由(3)的形成知：(1)的解一定是(3)的解，今(3)仅有一解，故(1)若有解，就只能是(2)。

再验证(2)确是(1)的解，即要证 $a_{i1}\frac{D_1}{D} + a_{i2}\frac{D_2}{D} + \dots + a_{in}\frac{D_n}{D} = b_i (i = 1,2\dots n)$。

考虑有两行相同的 n+1 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & \dots & a_{in} \\ b_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_i & a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将它按第一行展开，由于第一行中a_{ij}的代数余子式为

$$(-1)^{1+j+1}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_i & a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j+2}(-1)^{j-1}D_j = -D_j$$

$\therefore 0 = b_i D - a_{i1}D_1 - \dots - a_{in}D_n$　即　$a_{i1}\dfrac{D_1}{D} + a_{i2}\dfrac{D_2}{D} + \dots + a_{in}\dfrac{D_n}{D} = b_i\,(i = 1, 2 \dots n)$。

注 当方程个数与未知量个数不相等时，不能使用克莱姆法则。n 较大时,用法则计算量太大。此法则在理论上是很重要的。

例 21　求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

解　计算系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -153 \neq 0, \quad \text{及}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 153, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 153,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -153.$$

由克莱姆法则，得方程组唯一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -1, x_2 = \frac{D_2}{D} = -1, x_3 = \frac{D_3}{D} = 0, x_4 = \frac{D_4}{D} = 1. D \neq 0$$

例 22 设 $a_i \neq a_j (i \neq j, i, j = 1, 2, ..., n)$ 求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 + ... + a_1^{n-1} x_n = 1 \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 + ... + a_2^{n-1} x_n = 1 \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 + ... + a_3^{n-1} x_n = 1 \\ ...... \\ x_1 + a_n x_2 + a_n^2 x_3 + ... + a_n^{n-1} x_n = 1 \end{cases}$$

解 该方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & ... & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & ... & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & ... & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & ... & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$ 为n阶范德蒙行列式 D_n 的转置，故 $D = \prod_{1 \le i \prec j \le n} (a_j - a_i) \neq 0$ 由克莱姆法则知有唯一解。

计算得 $D_1 = D, D_j = \begin{vmatrix} 1 & ... & 1 & ... \\ 1 & ... & 1 & ... \\ \vdots & & \vdots & \\ 1 & ... & 1 & ... \end{vmatrix} = 0,$ 当 $j \geq 2$ 时。

故方程组唯一解为 $x_1 = 1, x_2 = ... = x_n = 0$ 。

克莱姆法则可叙述为下面的重用定理。

定理 4 若线性方程组(1)的系数行列式 $D \neq 0$，则它一定有解，且解是唯一的。它的逆否定理为:

定理 $4'$ 若线性方程组(1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零。

三．齐次线性方程组

定义 若(1)的右端项中至少有一个不为零，那么(1)为非齐次线性方程组。

定义 若(1)的右端项全为零，即 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$ (4)

则称此线性方程组为齐次线性方程组。

克莱姆法则的重要性可由下述定理略见 一斑。

定理 5 若齐次线性方程组(4)的系数行列式 $D \neq 0$，则齐次线性方程组(4)没有非零解。

定理 $5'$ 如果齐次线性方程组(4)有非零解，则它的系数行列式必为零。

注 齐次线性方程组必有零解。

例 23 问 λ,μ 取何值时 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_2+\mu x_2+x_3=0,\\ x_1+2\mu x_2+x_3=0.\end{cases}$ 有非零解？

解 当它的系数行列式 $D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 1 & 2\mu & 1\end{vmatrix}=0$ 即 $\lambda=1$ 或 $\mu=0$ 时方程组有非零解。

思考题 当线性方程组的系数行列式为零时，能否用克莱姆法则。

四、 小结

1、线性方程组解的判定定理：定理 4、$4'$、5、$5'$。

2、利用克莱姆法则解线性方程组。

五、作业 p_{26} 8(2) 、10

第一章 行列式习题课

一、本章知识点结构图

$$
\text{行列式}\begin{cases}
\text{全排列及其逆序数}\begin{cases}\text{奇偶排列}\\ \text{逆序}\end{cases}\\
\text{n阶行列式的定义}\begin{cases}\text{行列式的定义}\\ \text{代数余子式}\end{cases}\\
\text{对换}\\
\text{行列式的性质}\begin{cases}\text{行列式的7个性质}\\ \text{利用性质求解行列式}\end{cases}\\
\text{行列式按行（列）展开}\begin{cases}\text{展开定理}\\ \text{Laplace定理}\end{cases}\\
\text{克莱姆法则}\begin{cases}\text{适用情形}\\ \text{克莱姆法则的意义}\end{cases}
\end{cases}
$$

二、学习要点

学习本章的基本要求：了解行列式的概念；掌握行列式的性质，会应用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式；掌握克莱姆法则。

n 阶行列式的定义是本章的一个难点，掌握行列式的基本计算方法是本章的重点，而元素中含有字母的行列式的计算也是一个难点。

n 阶行列式的本质是对 n^2 个数按一定规则进行运算，其结果为一个数。这个运算规则的特点要掌握（前已介绍）。由克莱姆法则告知，方程组的系数行列式是否为零，决定了方程组的解的不同情形。这是因为行列式的值是否为零取决于行列式中行与行（或列与列之间）两种不同的情况，即后面所要讨论到的线性相

关及线性无关。所以行列式的概念与计算是今后讨论矩阵、线性方程组及 n 维向量的基础之一。

行列式的性质及展开定理是计算行列式的基础，要求我们对行列式的性质及展开法则一定要熟记，并弄清其含意及功能。行列式的具体计算方法常因题而异，应注意分析行列式的特点，灵活选用计算方法。

克莱姆法则是线性方程组理论中一个重要理论，它的意义在于给出了方程组的解与系数及常数之间的关系，但克莱姆法则仅适用于方程个数与未知量个数相等的方程组，且系数行列式不为零。因而克莱姆法则主要用于理论问题及简单方程组的求解，求解线性方程组的一般方法还是消元法。

三、典型例题

1、求排列的逆序数

例 24 求 i,j 使（1）2i68j431 是奇排列；（2）162i54j8 是偶排列。

解 （1）2i68j431 是 8 元排列，故 i,j 只能各是数字 5 和数字 7 中的一个。若 i=5，j＝7，由于 $\tau(25687431)=17$，则是奇排列。

（2）由 162i54j8 是 8 元排列，故 i,j 只能是数字 3 和数字 7 中的一个。i=7，j＝3 时，$\tau(16235478)$ 为偶排列。

2、n 阶行列式的定义

例 25 由行列式的定义证明：$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0$。

证明 由行列式定义，5 阶行列式的展开式中任意一项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$。由于 j_3,j_4,j_5 中至少有一个数取到 3,4,5 中的某一个，再由 D 中元素的特点，说明 $a_{3j_3},a_{4j_4},a_{5j_5}$ 中至少有一个元素为零。这样展开式中任意一项都为零，因此 D=0。

注 含零较多的行列式，可直接用定义计算。

例 26 （1）写出 4 阶行列式中，带负号且包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项。

（2）在函数 $f(x)=\begin{pmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{pmatrix}$ 中，求 x^3 的系数。

解 （1）由行列式的定义可知，包含 a_{23} 和 a_{31} 的项必为 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 和 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$，其列下标的逆序数分别为 D_n $\tau(2314)=2$ 和 $\tau(4312)=5$。已知所求想

带负号，故取列下标为奇排列的$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$。

（2）根据行列式的定义，仅当$a_{12},a_{21},a_{33},a_{44}$四个元素相乘才出现$x^3$项，这时该项列下标的排列的逆序数为$\tau(2134)=1$，故含$x^3$的项的系数为－1。

例 27 利用$D_n=\begin{pmatrix}1&1&...&1\\1&1&...&1\\...&...&...&...\\1&1&...&1\end{pmatrix}$＝0 证明 n 个数 1,2,…,n 的所有排列中，奇偶排列各半。

证明 根据行列式的定义有$D_n=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$其中$j_1j_2...j_n$为 n 个数 1,2,…,n 的某个排列，该和式共有$n!$项，且每项的绝对值都是 1。由已知$D_n=0$，知上面和式中 1 和－1 的个数相等，均为$\frac{n!}{2}$个，这说明 1,2,…,n 的所有排列中，奇偶排列各占一半。

3、行列式的性质与展开定理的应用

例 28 设$D=\begin{vmatrix}3&-5&2&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}$, D 的 i 行 j 列元的余子式和代数余子式依次记作M_{ij}和A_{ij}，求$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$及$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$。

解 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$等于用 1,1,1,1 代替 D 的第 1 行所得的行列式，即

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}\overset{r_4+r_3}{\underset{r_3-r_1}{====}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&-5\\-2&2&0&2\\1&-1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&-5\\-2&2&2\\1&-1&0\end{vmatrix}\overset{c_2+c_1}{====}\begin{vmatrix}1&2&-5\\-2&0&2\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-5\\0&2\end{vmatrix}=4$$

又 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}$

$$=\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0 & -5\\ 1 & 3 & 1 & 3\\ -1 & -4 & -1 & -3\end{vmatrix}\overset{r_4+r_3}{=\!=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0 & -5\\ 1 & 3 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & -5\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}\overset{r_1-2r_3}{=\!=\!=\!=\!=}-\begin{vmatrix}-1 & 0 & -5\\ -1 & 0 & -5\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=0$$

例 29 设 $f(x)=\begin{vmatrix}x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3\\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}$，求 $f(x)=0$ 的全部根。

解 注意到行列式的特点，将第一列的－1 倍依次加至其余各列上，得

$$f(x)=\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & -1\\ 2x-2 & 1 & 0 & -1\\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2\\ 4x & -3 & x-7 & -3\end{vmatrix}\overset{c_4+c_2}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & 0\\ 2x-2 & 1 & 0 & 0\\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1\\ 4x & -3 & x-7 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-2 & 1\\ 2x-2 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x-2 & -1\\ 2x-2 & -6\end{vmatrix}$$

$=5x(x-1)=0$，所以，方程 $f(x)=0$ 有两根为 $x_1=0, x_2=1$。

4、行列式的计算

行列式的基本计算方法是：（1）利用行列式性质将行列式化成较简单的且易于计算的行列式（如上（下）三角行列式）（2）由行列式展开定理，将高阶行列式化成较低阶行列式来计算。实际计算时，常将以上两种方法交替使用。对应数字行列式，常先利用行列式的性质将某行（列）中较多元素化成零，再按此行（列）展开。对于元素中出现字母或元素之间有某些规律的行列式，要注意分析其特点，采用适当的方法来计算。常用的方法有三角化法、箭形法、加边法、递推法及数学归纳法等。

例 30 计算 $D=\begin{vmatrix}a_1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a_n\end{vmatrix}$ $a_i\neq 0(i=1,2......)$

解

$$D \xlongequal[r_1-\frac{1}{a_n}r_n]{r_1-\frac{1}{a_2}r_2 \\ \cdots\cdots} \begin{vmatrix} a_1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i} & & \cdots & \\ 1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a_n \end{vmatrix} = a_2 \ldots a_n [a_1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}]$$ 。

注 箭形行列式型如  等，均可用上述方法化成三角形行列式。

例 31 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$。

解一 注意到第一行减去第二行，第三行减去第四行，会出现四个零元素，故设法把原行列式化成上三角行列式。

$$D \xlongequal[r_4-r_3]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 0 & -y & -y \end{vmatrix} = (-x)(-y) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_1-r_4]{r_3-r_2} \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} 1+x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1+y & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2y^2$$

解二 考虑到 D 中每个元素中都有 1，利用拆成两个行列式相加的方法。

$$D=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1+0\\ 1 & 1-x & 1 & 1+0\\ 1 & 1 & 1+y & 1+0\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1-x & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1+y & 0\\ 1 & 1 & 1 & -y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & 0 & 0 & 1\\ 0 & -x & 0 & 1\\ 0 & 0 & y & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}+(-y)\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1+0\\ 1 & 1-x & 1+0\\ 1 & 1 & 1+y\end{vmatrix}$$

$$=-x^2y-y\left[\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1+x & 1 & 0\\ 1 & 1-x & 0\\ 1 & 1 & y\end{vmatrix}\right]=-x^2y-y\left[\begin{vmatrix}x & 0 & 1\\ 0 & -x & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}+y\begin{vmatrix}1+x & 1\\ 1 & 1-x\end{vmatrix}\right]$$

$$=-x^2y-y(-x^2-x^2y)=x^2y^2$$

解三 构造一个 5 阶行列式，由按第一列展开可知它与 D 是相等的，即

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1+x & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1+y & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}\xlongequal[(i=2,3,4,5)]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & x & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -x & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & y & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}$$

此为箭形行列式。当 $xy=0$ 时，显然 D=0。不妨设 $xy\neq 0$。将第二列的 $\frac{1}{x}$ 倍，第 3 列的（$-\frac{1}{x}$）倍，第 4 列的 $\frac{1}{y}$ 倍，第 5 列的（$-\frac{1}{y}$）倍都加到第 1 列上，可有

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & x & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}=x^2y^2。$$

解四 若 $y=0$ 得 $D=0$。下设 $y\neq 0$

$$D\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ -x & -x & 0 & 0\\ -x & 0 & y & 0\\ -x & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-c_2+\frac{x}{y}c_3-\frac{x}{y}c_4}\begin{vmatrix}x & 1 & 1 & 1\\ 0 & -x & 0 & 0\\ 0 & 0 & y & 0\\ 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}=x^2y^2。$$

而 $D=x^2y^2$ 也包含 $y=0$ 时的结果，所以 $D=x^2y^2$。

注　凡涉及$\frac{1}{y}$用去乘某行（列），必须有$y \neq 0$的前提，而$y=0$的情况要另行处理，这一点务必请注意。

例 32 计算行列式$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+b \end{vmatrix}$。

解一　该行列式行和相同，将各列都加到第 1 列上，然后提取第 1 列的公因子，可得

$$D_n = (b+\sum_{i=1}^{n} a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3+b & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+b \end{vmatrix} = (b+\sum_{i=1}^{n} a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b \end{vmatrix}$$

$$= b^{n-1}(b+\sum_{i=1}^{n} a_i)\text{。}$$

解二 将第 1 行的（－1）倍分别加到下面各行上，得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -b & b & 0 & \dots & 0 \\ -b & 0 & b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b & 0 & 0 & \dots & b \end{vmatrix}$$　　这是一个箭形行列式…….

解三　用加边构造以下与D_n相等的 n+1 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & a_1+b & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+b & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b \end{vmatrix} \overset{r_i - r_1}{\underset{(i=2,3,\dots,n)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -1 & b & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & b \end{vmatrix}$$

这是一个箭形行列式……

解四　D_n与D_{n-1}的结构形似，求出D_n与D_{n-1}之间的关系，称之为递推公式。

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \dots & a_n+0 \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \dots & a_n+0 \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \dots & a_n+0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \dots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & b \end{vmatrix}$$

将上式等号右边第一个行列式的各行都减去第 n 行，第二个行列式按第 n 列展开，得

$$D_n=\begin{vmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{vmatrix}+bD_{n-1}=b^{n-1}a_n+bD_{n-1}.$$ 类似有 $D_{n-1}=b^{n-2}a_{n-1}+bD_{n-2}$. 代人上式得

$$\begin{aligned} D_n &= b^{n-1}a_n+b(b^{n-2}a_{n-1}+bD_{n-2})=b^{n-1}(a_n+a_{n-1})+b^2D_{n-2} \\ &=\dots=b^{n-1}(a_n+a_{n-1}+\dots+a_2)+b^{n-1}D_1=b^{n-1}(a_n+a_{n-1}+\dots+a_2)+b^{n-1}(a_1+b) \\ &=b^{n-1}(b+\sum_{i=1}^{n}a_i) \end{aligned}$$

注 用递推法计算行列式的关键是找到递推公式，常用行列式按行（列）展开来推导递推公式，递推公式也是用数学归纳法计算行列式的基础。

例 33 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix}$。

分析 此行列式与范德蒙行列式相似，但缺少 a_i 的 3 次幂。因此添上一行一列，使它成为范德蒙行列式。

解 够造 5 阶范德蒙行列式

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & x^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & x^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & x^4 \end{vmatrix}=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\cdot\prod_{1\le j<i\le 4}(a_i-a_j)$$ 。（1）

又对 $f(x)$ 按第 5 列展开，有 $f(x)=A_{15}+xA_{25}+x^2A_{35}+x^3A_{45}+x^4A_{55}$。

而所求 $D_4=-A_{45}$，即 D_4 为 $f(x)$ 的展开式中 x^3 项系数的相反数。由（1）式

知 $f(x)$ 中 x^3 项系数 为$-(\sum_{i=1}^{4}a_i)\prod_{1\le j<i\le 4}(a_i-a_j)$,所以$D_4=(\sum_{i=1}^{4}a_i)\prod_{1\le j<i\le 4}(a_i-a_j)$。

5、应用克莱姆法则解线性方程组

例 34 选择题 设线性方程组为$\begin{cases} bx-ay=-2ab \\ -2cy+3bz=bc \\ cx+az=0 \end{cases}$,则（ ）。

（A）当a,b,c取任意实数时，方程组均有解 （B）当$a=0$时，方程组无解

（C）当$b=0$时，方程组无解 （D）当$c=0$时，方程组无解

解 方程组的系数行列式$D=-5abc$，由克莱姆法则知当$abc\neq 0$时，方程组有唯一解；当$a=0$或$b=0$或$c=0$时，代人方程后，易知方程组均有无穷多解，故选（A）

例 35 已知对称轴平行于 y 轴的抛物线过三点：$(1,-1)$,$(2,1)$,$(-1,7)$ 试求该抛物线方程。

解 可设所求为$ty=ax^2+bx+c$。由三点在抛物线上得$\begin{cases} ax^2+bx+c-ty=0, \\ a+b+c+t=0, \\ 4a+2b+c-t=0, \\ a-b+c-7t=0. \end{cases}$

作为a,b,c,t为未知量的齐次线性方程组，由a,b,c,t应不全为零，所以方程组的系数行列式应为零，即有$D=\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 & -y \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -7 \end{vmatrix}=0$。按第一行展开得

$12x^2-24x+6-6y=0$，即抛物线方程为$y=2x^2-4x+1$。