第二章　　矩阵及其运算

第一节　　矩阵

一．矩阵的概念

定义　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2...m;j=1,2...n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$ 称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵。记作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$。其中 $a_{ij}(i=1,2...m;j=1,2...n)$ 称为矩阵的第 i 行第 j 列元素。

常用大写字母 A.B.C 等，或者用 $(a_{ij})_{m\times n}$、$(b_{ij})_{m\times n}$、$(c_{ij})_{m\times n}$ 等表示矩阵。

注　1、注意与行列式的有关概念、运算相区别。

2、矩阵是一张表，其行、列数可以不等，不能象行列式那样算出一个数来。

二．几种特殊的矩阵

（1）只有一行的矩阵称为**行距阵**，记为 $A=(a_1a_2...a_n)(m=1)$；只有一列的矩阵称为**列矩阵**，记为 $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_4 \end{pmatrix}(n=1)$。

(2)两矩阵的行数相等、列数也相等时，就称它们是**同型矩阵**。

(3)元素都是零的矩阵称为**零矩阵**，记作○。（注：不同型的零阵不相同）

(4)当 m=n 时，矩阵称为**方阵**。

(5)方阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 称为**对角阵**。

(6)方阵 $E_n=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$ 称为**单位矩阵**。注：特点为主对角线上的元素全是 1，其它为 0。

(7)方阵$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$称为**上三角阵**。

(8)方阵$E_n=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$称为**下三角阵**。注：特点为当$i \prec j$时$a_{ij}=0$。

(9)若方阵 A 满足$a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2...n)$，则称 A 为**对称矩阵**。特点：它的元素以主对角线为对称轴对应相等。

(10)若方阵 A 满足$a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2...n)$，则称 A 为**反对称矩阵**。特点：它的元素以主对角线为对称轴对应相反。

三．线性变换与矩阵之间的一一对应关系

线性变换$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n, \\ ...... \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n. \end{cases}$

的系数a_{ij}构成矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$。

第二节　　矩阵的运算

一．矩阵相等

设两矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}, B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$，若$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2...m; j=1,2...n)$则称矩阵 A 与 B 相等，记作 A=B。（注：两矩阵相等 1.两矩阵同型；2.对应元素也相同。）

二．方阵的行列式

由方阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$的元素构成的行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$称为矩阵 A 的行列式，记为$\det(A)$或$|A|$。

注：矩阵与行列式是两个不同的概念，矩阵是一个表格，行列式是一个数。一定要区分方阵 A 与方阵 A 的行列式$|A|$。

三．矩阵的加法

引例　某家电公司有两个分厂，2000 年第一季度和第二季度产量表分别如下：

第一季度：

	空调	电视机	冰箱
一厂	a_{11}	a_{12}	a_{13}
二厂	a_{21}	a_{22}	a_{23}

第二季度：

	空调	电视机	冰箱
一厂	b_{11}	b_{12}	b_{13}
二厂	b_{21}	b_{22}	b_{23}

上述产量表可分别表示为矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}，\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}。$$

据此该公司 2000 年上半年的产量用矩阵表示应该是

$$C=\left(c_{ij}\right)_{2\times3}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}。$$

从此问题的实际意义出发自然把矩阵 C 称为矩阵 A 与 B 的和.

1．**定义**：设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}, B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}\ (i=1,2...m;\ j=1,2...n)$ 则

$C=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵 A 与矩阵 B 的和。记为 $C=A+B$（注：A，B 必同型才可相加）

2．负矩阵　设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，记 $-A=\left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$，－A 称为矩阵 A 的负矩阵。

3．矩阵减法定义　A－B=A＋（－B）

4.加、减法性质：1)A+B=B+A　2)(A+B)+C=A+(B+C)　3)A+O=A　4)A+(-A)=○

其中 A、B、C 为同型矩阵。

四．数乘矩阵

1 定义：数 k 与矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 的乘积记作 kA，规定 kA＝$\left(ka_{ij}\right)_{m\times n}$。

注：当 A 是 n 阶方阵时　$|\lambda A|=\lambda^n|A|$

注：数乘矩阵是用数乘此矩阵中的每一个元素，应与数乘行列式加以区分。

例　上例中那家公司计划 2000 年第三季度两个分厂所有产品的产量均比第二季度增长 10 %，则第三季度的产量用矩阵表示为 $\begin{pmatrix} 1.1b_{11} & 1.1b_{12} & 1.1b_{13} \\ 1.1b_{21} & 1.1b_{22} & 1.1b_{23} \end{pmatrix}=G=1.1B$。

2. **性 质**　1)　k(A+B)=kA ＋ kB　2) $(k+l)A=kA+lA$　3) $(kl)A=k(lA)$

4)$1\bullet A=A$　其中 k,l 为数；A,B 为同型矩阵。

例　设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$　求 $\lambda E-A$(λ 为数）。

解　$\lambda E-A=\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 2\\ -4 & \lambda-1\end{pmatrix}$。

五．矩阵的乘法

例　在上例中，那家家电公司两分厂 2000 年第一季度空调、电视机、冰箱的产量矩阵已表示为$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$现设空调、电视机、冰箱每台的销售价分别为 d_{11},d_{21},d_{31}；每台的利润分别为 d_{12},d_{22},d_{32}。若记单位售价和单位利润的矩阵为 B，则 $B=\begin{pmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\\ d_{31} & d_{32}\end{pmatrix}$。如设两厂的该季度的总销售价分别为 m_{11},m_{21}；总利润分别为 m_{12},m_{22}。若记总销售价和总利润的矩阵为 M，则 $M=\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}$，

其中 $m_{11}=a_{11}d_{11}+a_{12}d_{21}+a_{13}d_{31}$；　$m_{21}=a_{21}d_{11}+a_{22}d_{21}+a_{23}d_{31}$；

$m_{12}=a_{11}d_{12}+a_{12}d_{22}+a_{13}d_{32}$；　$m_{22}=a_{21}d_{12}+a_{22}d_{22}+a_{23}d_{32}$。

按产量，单价，总价间的关系。称 M 为 A,B 的乘积也是自然的。

1 定义　设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times s},B=\left(b_{ij}\right)_{s\times n}$，那么 A 与 B 的乘积为 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ 即 $C=AB$。其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$ $(i=1,2\ldots m;\ j=1,2\ldots n)$

注： 1) 要使 $C=AB$ 有意义，则 A 的列数等于 B 的行数。2) 已知 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times s},B=\left(b_{ij}\right)_{s\times n}$，求 $C=AB$ 的步骤如下：

1^0 AB 的行数＝A 的行数　　AB 的列数＝B 的行数　2^0 c_{ij} 是 A 的 i 行与 B 的 j 列对应元素乘积之和。

例 $A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$，　　$B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \ldots & b_n\end{pmatrix}_{1\times n}$，求 AB,BA.

解 $AB=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$； $BA=\left(b_1a_1+b_2a_2+\ldots b_na_n\right)_{1\times1}$。

注：两个同维的行矩阵与列矩阵可以相乘，但是 BA 是一个数（一阶方阵），而 AB 是一个 $n\times n$ 矩阵。

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。求 AB.

解

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}。$$

注：B 的列数不等于 A 的行数，所以 BA 无意义。

例 线性方程组

$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$ (1) 可用矩阵表示为 $AX=B$（2）。（2）称为矩阵方程。

其中 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$， $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$。

2．乘法运算规则 假设运算都是可行的

1)结合律： $A(BC)=(AB)C$， $k(AB)=(kA)B=A(kB)$；

2)分配律： $A(B+C)=AB+AC$， $(B+C)A=BA+CA$；

3) $E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}$， $A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$；

（注：E 在矩阵乘法中的作用类似于数 1。）

4）〇A=〇， A〇＝〇；

5) $|AB|=|A||B|$，其中 A,B 均为方阵。（注：一般 $AB\neq BA$，但 $|AB|=|BA|$。推广 $|A_1A_2\ldots A_n|=|A_1||A_2|\ldots|A_n|$ 。另 $|A+B|\neq|A|+|B|$）

6) $(\lambda E_n)A_{n\times n}=\lambda(E_nA_{n\times n})=\lambda A_{n\times n}, A_{n\times n}(\lambda E_n)=\lambda(A_{n\times n}E_n)=\lambda A_{n\times n}.$

（注：称 $\lambda E_n=\begin{pmatrix}\lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda\end{pmatrix}_{n\times n}$ 为数量矩阵。上式表明数量矩阵和同阶方阵乘法可交换）

这些性质的证明繁而不难，故不列出。

注：矩阵乘法与数的乘法规律的不同之处：

1)AB 有意义的条件；**2)**矩阵乘法一般不满足交换律　即一般 $AB\neq BA$。

例　$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$　则 $AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$。

3)矩阵中存在 $A\neq O, B\neq O$ 有 $AB=O$，故由 $AB=O$ 不能得出 $A=O$ 或 $B=O$；若 $A\neq O$，而 $A(X-Y)=O$，也不能得出 X=Y。

4) 矩阵乘法消去律不成立。

例　$A=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 5 & 8\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 8\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$，有 $AC=BC=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 16 & 24\end{pmatrix}$ 且 $C\neq O$ 但 $A\neq B$。

3.可交换的矩阵

定义　若两矩阵 A 与 B，满足 AB=BA，则称矩阵 A 矩阵 B 可交换。

例　设 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵 B。

解：因为 AB=BA，所有 B 应为 2×2 矩阵。设 $B=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$

则 AB＝$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$＝BA　由矩阵相等的定义有

$\begin{cases}x_{11}+3x_{21}=x_{11}\\ x_{12}+3x_{22}=3x_{11}+x_{12}\\ x_{21}=x_{21}\\ x_{22}=3x_{21}+x_{22}\end{cases}$ 解方程组得，$x_{21}=0, x_{11}=x_{22}$，取 $x_{11}=x_{22}=a, x_{12}=b$（$a,b$ 为任意常数）。于是，所有与 A 可交换的矩阵为 $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$（$a,b$ 为任意常数）。

六．方阵的幂

1 定义　设 A 为 n 阶方阵，规定 $A^1=A$，$A^2=A^1A^1$，…，$A^{k+1}=A^kA^1$，其中

k 为正整数。即 $A^k=\overbrace{AA...A}^{k个}$。

注：只有方阵，它的幂才有意义。

2.性质 1） $A^kA^l=A^{k+l}$ 2) $(A^k)^l=A^{kl}$。

思考：一般 $(AB)^k\neq A^kB^k$，为什么？

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$，求 A^{100}。

解 $A^2=4E$ $A^{100}=(A^2)^{50}=(4E)^{50}=4^{50}E$。

例 证明 $\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\phi&\cos\phi\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\varphi&-\sin n\varphi\\\sin n\varphi&\cos n\varphi\end{pmatrix}$。

证 用数学归纳法。当 n＝1 时，等式显然成立。

设 n＝k 时成立，即设

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\phi&\cos\phi\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\cos k\varphi&-\sin k\varphi\\\sin k\varphi&\cos k\varphi\end{pmatrix}$$

要证 n＝k＋1 时成立。此时有

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\cos k\varphi&-\sin k\varphi\\\sin k\varphi&\cos k\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos k\varphi\cos\varphi-\sin k\varphi\sin\varphi&-\cos k\varphi\sin\varphi-\sin k\varphi\cos\varphi\\\sin k\varphi\cos\varphi+\cos k\varphi\sin\varphi&-\sin k\varphi\sin\varphi+\cos k\varphi\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\varphi&-\sin(k+1)\varphi\\\sin(k+1)\varphi&\cos(k+1)\varphi\end{pmatrix}.$$

于是等式得证。

七．矩阵的转置，

1 定义：把矩阵 A 的行换成同序数的列得到一个新矩阵，叫做 A 的转置矩阵，记作 A^T。

例如 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&3&6\end{pmatrix},A^T=\begin{pmatrix}1&0\\-1&3\\1&6\end{pmatrix}$。

2.运算规律：

1) $(A^T)^T = A$; 2) $(A+B)^T = A^T + B^T$; 3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$; 4) $|A|^T = |A|$;

5) $(AB)^T = B^T A^T$.（推广 $(A_1 A_2 ... A_n)^T = A_n{}^T ... A_2{}^T A_1{}^T$ ）

性质 1)---4)均可由定义直接导出。

证明 5) 首先 $(AB)^T$ 与 $B^T A^T$ 同型；

其次 $(AB)^T$ 的第 i 行 j 列元素等于 AB 的第 j 行 i 列元素它是

$a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + ... + a_{js}b_{si}$ 此式恰好是 B^T 中第 i 行与 A^T 中第 j 列对应元素乘积之和，即是 $B^T A^T$ 中第 i 行 j 列元素。

例 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，求 $(AB)^T$ 。

解 法一：先求 AB，再求 $(AB)^T$ 。

法二：$(AB)^T = B^T A^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 12 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$。

注 A^T 与 B^T 不能相乘。

例 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，证明 $A^T A$ 及 AA^T 都是对称阵。

证明 $A^T A$ 是 n 阶方阵，且 $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$.。故 $A^T A$ 是 n 阶对称方阵。同理可证：AA^T 是 m 阶对称方阵。

注 两个对称方阵的乘积未必是对称方阵。

例 设列矩阵 $X = (x_1, x_2, ... x_n)^T$ 满足 $X^T X = 1$，E 为 n 阶单位阵，$H = E - 2XX^T$，证明 H 是对称矩阵，且 $HH^T = E$ 。

例 任意一个 n 阶方阵 A 都可表为一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

解 任意 n 阶矩阵都可以表示为 $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$

因为 $[\frac{1}{2}(A + A^T)]^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$，所以 $\frac{1}{2}(A + A^T)$ 为对称矩阵，

又 $[\frac{1}{2}(A - A^T)]^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T)$，所以 $\frac{1}{2}(A - A^T)$ 为反对称矩阵。故命题得证。

思考题：设 A，B 均为 3 阶方阵且 $|A|=\frac{1}{2},|B|=2.$ 求 $|-A|$ 及 $|2B^TA^2|$。

第三节　　逆矩阵

一．定义

定义：对应 n 阶矩阵 A，如果有一个 n 阶矩阵 B，使 AB=BA=E，则说矩阵 A 是可逆的，并把矩阵 B 称为 A 的逆矩阵。记 $B=A^{-1}$，同样 $A=B^{-1}$，B 也是可逆的。

注　只有方阵，才有逆阵的概念。

例 1　$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，由于 AB=BA＝$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，故矩阵 A 是可逆阵，且 $A^{-1}=B$。

例 2　零阵不可逆。因为 $OB=BO=O$。（B 为任意与 O 同阶方阵）

二．逆矩阵的性质

定理　设 A、B 都是 n 阶可逆阵，则

1)矩阵 A 的逆矩阵唯一;

证　设 B、C 均为 A 的逆阵，则　AB=BA=E　AC=CA=E　故 B=EB=CAB=CE=C.

2)矩阵 A^{-1} 也是可逆的，且 $(A^{-1})^{-1}$＝A.;

3)矩阵 AB 也是可逆的，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。（推广　$(A_1A_2...A_n)^{-1}=A_n^{-1}...A_2^{-1}A_1^{-1}$）;

4)矩阵 A^T 也是可逆的，且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$。　因为 $A^T(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=E.$

5)若 $\lambda\neq 0$，则矩阵 λA 也是可逆的，且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$;

6)若 AC=O,则 C=O;

7)若 AD=AC，则 D=C.

8)若 A=diag$(\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n)$ 则 A^{-1}＝diag$(\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},...\lambda_n^{-1})$。

注　若 A、B 为同阶可逆矩阵，则 A+B 未必可逆。

三．伴随矩阵法求逆阵：

1 伴随矩阵：行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式所构成的如下的矩阵

$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$ 称为 A 的伴随矩阵。其中 A_{ij} 为 A 中元素 a_{ij} 的代数余

子式$(i, j=1,2\ldots,n)$。

例 3 证明 $AA^*=A^*A=|A|E$。

证 设 $A=(a_{ij})$, 记 $AA^*=(b_{ij})$，则 $b_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}=|A|\delta_{ij}$，即

$$AA^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} |A| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |A| & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & |A| \end{pmatrix}=|A|\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=|A|E$$

类似有 $A^*A=(\sum_{k=1}^{n}A_{ki}a_{kj})=(|A|\delta_{ij})=|A|(\delta_{ij})=|A|E$。

由上面证明可知当$|A|\neq 0$时，有 $A\frac{A^*}{|A|}=\frac{A^*}{|A|}A=E$，即当$|A|\neq 0$时，矩阵$\frac{A^*}{|A|}$是A 的逆阵。

定理 1 若矩阵 A 可逆，则$|A|\neq 0$。

证 因为 A 可逆，所以有A^{-1}使$A^{-1}A=E$。故$|A^{-1}A|=|A^{-1}||A|=1\neq 0$，从而$|A|\neq 0$。

定理 2 若$|A|\neq 0$，则矩阵 A 可逆，且$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$，其中A^*为 A 的伴随矩阵。

注 ：当 n 较大时，用此方法求逆阵比较麻烦。

重要推论 若 $AB=E$（或 BA=E），则 A、B 均可逆，且 $A^{-1}=B, B^{-1}=A$。

注 这推论表明若要证明“A 可逆，且其逆为 B”这样的命题，只要验算一下 AB=E 或 BA＝E 即可。

定义 当$|A|=0$时，A 称为奇异矩阵。否则称为非奇异矩阵。

注：A 可逆$\Leftrightarrow$A 为非奇异矩阵。

例 4 设 $A=\begin{pmatrix}1&3&0\\2&6&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，求证：A 为可逆矩阵，且求出 A^{-1}。

解 因为 $|A|=\begin{vmatrix}1&3&0\\2&6&1\\0&1&1\end{vmatrix}$＝－$1\neq 0$，所以 A 可逆。且 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$＝－A^*＝－$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$，$A^{-1}=\begin{pmatrix}-5&3&-3\\2&-1&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$。

思考题：若 A 可逆，那么矩阵方程 AX=B 是否有唯一解 X=A^{-1}B？矩阵方程 YA=B 是否有唯一解 Y=BA^{-1}？

注 上述当 $|A|\neq 0$ 时解矩阵方程 AX=B（YA=B）和中学当 $a\neq 0$ 时解线性方程 ax=c 思路是相似的，数字方程是两边乘 a^{-1}，矩阵方程是两边左（右）乘 A^{-1}。只是因矩阵乘法交换律不成立，所以成 A^{-1} 时要分左乘和右乘，这一点务必注意。

例 5 已知 $AP=PB,$ 其中 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$ 求 A, A^5。

解 ：因为 $|P|=-1\neq 0,$ 所以矩阵 P 可逆，于是由 $AP=PB$ 得 $A=PBP^{-1}$，又

$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$ 故 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}$

又 $A^5=(PBP^{-1})^5=(PBP^{-1})(PBP^{-1})...(PBP^{-1})=PB^5P^{-1}$

由于 $B^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 所以

$$B^5=B^4B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=B$$

故 $A^5=PBP^{-1}=A$。

四 矩阵 **A** 的 **m** 次多项式

设 $\varphi(x)=a_0+a_1x+...a_mx^m$ 为 x 的 m 次多项式，A 为 n 阶矩阵，记 $\varphi(A)=a_0E+a_1A+...+a_mA^m$，$\varphi(A)$ 称为矩阵 A 的 m 次多项式。

例 6 设 $f(x)=x^2-2x-3, A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}$，求 $f(A)$。

解 $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 9\end{pmatrix}$。

$f(A)=A^2-2A-3E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 9\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$。

因为矩阵 A^k, A^l, E 都是可交换的，所以矩阵 A 的两个多项式 $\varphi(A)$ 与 $f(A)$ 总是可交换的，即总有 $\varphi(A)f(A)=f(A)\varphi(A)$，从而 A 的几个多项式可以像数 x 的多项式一样相乘或因式分解。例如（E+A）（2E－A）＝2E+A- A^2，$(E-A)^3=E-3A+3A^2-A^3$。

我们常用例 5 的方法来计算 A 的多项式 $\varphi(A)$，即：

（1）如果 $A=P\Delta P^{-1}$，则 $A^k=P\Delta^kP^{-1}$，从而 $\varphi(A)=a_0E+a_1A+...+a_mA^m$ ＝$Pa_0EP^{-1}+Pa_1\Delta P^{-1}+...+Pa_m\Delta^mP^{-1}=P\varphi(\Delta)P^{-1}$。

（2）如果 $\Delta=diag(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$ 为对角阵，则 $\Delta^k=diag(\lambda_1^k,\lambda_2^k,...,\lambda_n^k)$，从而 $\varphi(\Delta)=a_0E+a_2\Delta+...+a_m\Delta^m$

$$=a_0\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}+...+a_m\begin{pmatrix}\lambda_1{}^m & & & \\ & \lambda_2{}^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n{}^m\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n)\end{pmatrix}。$$

例 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-2A-3E=O$。（1）证明 A 为可逆矩阵，求

A^{-1}。

（2）证明 A+2E 为可逆矩阵，且求出 $(A+2E)^{-1}$。

解 （1）由题设移项得 $A^2-2A=3E$， $A(A-2E)=3E$，$A(\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}E)=E$。

由重要推论知，A 为可逆矩阵，且 $A^{-1}=\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}E$。

（2）题设恒等变形

$$A^2+2A-4A-8E+5E=O \quad A(A+2E)-4(A+2E)=-5E,$$

$-\frac{1}{5}(A-4E)(A+2E)=E.$ 故 $(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{5}(A-4E)$。

第四节　　矩阵分块

一 分块矩阵的概念

定义 用一些纵（横）线将矩阵分成许多小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。

例如 $A=\begin{pmatrix}5&0&3&-1\\0&-1&4&6\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$分块的方法很多，下面取出三种分块形式：

1) $\left(\begin{array}{ccc:c}5&0&3&-1\\0&-1&4&6\\0&0&1&0\\ \hdashline 0&0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$，其中 $A_{11}=\begin{pmatrix}5&0&3\\0&-1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A_{12}=\begin{pmatrix}-1\\6\\0\end{pmatrix}$。
$A_{21}=\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}$ $A_{22}=\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$

2) $\left(\begin{array}{cc:cc}5&0&3&-1\\0&-1&4&6\\ \hdashline 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$，其中 $A_{11}=\begin{pmatrix}5&0\\0&-1\end{pmatrix},A_{12}=\begin{pmatrix}3&-1\\4&6\end{pmatrix}$
$A_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},A_{22}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

3) 按列分块 $\left(\begin{array}{c:c:c:c}5&0&3&-1\\0&-1&4&6\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}&A_{14}\end{pmatrix}$，

其中 $A_{11}=\begin{pmatrix}5\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $A_{12}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ $A_{13}=\begin{pmatrix}3\\4\\1\\0\end{pmatrix}$ $A_{14}=\begin{pmatrix}-1\\6\\0\\1\end{pmatrix}$。

4)按行分块 $\begin{pmatrix}5 & 0 & 3 & -1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & -1 & 4 & 6\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}\\A_{21}\\A_{31}\\A_{41}\end{pmatrix}$，其中 $\begin{matrix}A_{11}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 3 & -1\end{pmatrix}\\ A_{21}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4 & 6\end{pmatrix}\\ A_{31}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\\ A_{41}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{matrix}$。

注 矩阵分块有两个原则：1）作分块后，在矩阵运算中，可把子矩阵当作“数”，像普通的数为元素的矩阵一样运算，2)尽量使运算能简便。对于不同的运算，矩阵分块的原则也不相同。

一 分块矩阵的运算

1.加、减法

设矩阵 A、B 都是 $m\times n$ 矩阵，采用相同的分块，即 $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ A_{p1} & A_{p1} & \cdots & A_{pq}\end{pmatrix}$，

$B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1q}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2q}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ B_{p1} & B_{p2} & \cdots & B_{pq}\end{pmatrix}$，其中 A_{ij}， B_{ij} 都是 $m_i\times n_j\ (i=1,2,\ldots,p;\ j=1,2,\ldots,q)$

矩阵适合 $\sum_{i=1}^{p}m_i=m$， $\sum_{i=1}^{q}n_i=n$。则

$$A+B=\begin{pmatrix}A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1q}+B_{1q}\\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2q}+B_{2q}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ A_{p1}+B_{p1} & A_{p2}+B_{p2} & \cdots & A_{pq}+B_{pq}\end{pmatrix}。$$

2 数乘 设 λ 为数，那么 $\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1q}\\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2q}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda A_{p1} & \lambda A_{p2} & \cdots & \lambda A_{pq}\end{pmatrix}$。

3 乘法：设 $\mathrm{A}=(a_{ij})_{m\times s}$， $B=(b_{ij})_{s\times n}$。若对 A 的列的划分方法与对 B 的行的

划分方法

一致。即 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pt} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tq} \end{pmatrix}$，其中 A_{ik} 是 $m_i \times s_k$ 子矩阵，B_{kj} 是 $s_k \times n_j$ 子矩阵。则 $AB=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1q} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pq} \end{pmatrix}$，其中

$$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}\ldots+A_{it}B_{tj}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\,(i=1,2,\ldots,p;\ j=1,2,\ldots,q).$$

这表明此时分块矩阵 A、B 之间乘法的规则如同把子矩阵看成“数”，与以数为元素的 $p\times t$ 矩阵乘 $t\times q$ 矩阵的规则相同。

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。对 A、B 做适当的分块，计算 AB.

解 将矩阵 A,B 分块（比如先确定 A 的分法，然后据此确定 B 的分法）

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 6 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_3 & A_1 \\ O_{2\times 3} & 4E_2 \end{pmatrix}$，

$B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \vdots & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & \vdots & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & \vdots & c_3 & c_4 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O_{2\times 2} & E_2 \end{pmatrix}$。

有 $AB=\begin{pmatrix} E_3 & A_1 \\ O_{2\times 3} & 4E_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O_{2\times 2} & E_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & B_2+A_1 \\ O_{2\times 2} & 4E_2 \end{pmatrix}$。

仅需计算$B_2+A_1=\begin{pmatrix} a_3+2 & a_4+5 \\ b_3+3 & b_4-2 \\ c_3-1 & c_4+6 \end{pmatrix}$。

故$AB=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3+2 & a_4+5 \\ b_1 & b_2 & b_3+3 & b_4-2 \\ c_1 & c_2 & c_3-1 & c_4+6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$。

注 ：1)左矩阵的分法必须与右矩阵的分法一致，分块乘法才能进行。

2)当矩阵行、列数较高时，为了简化计算，经常采用矩阵分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算。

3）在分块时，纵、横线要贯穿整个矩阵，可根据需要对同一矩阵用不同的分块方法，构成不同的分块矩阵。

4）由于矩阵的加法和数乘比较简单，一般不需分块计算。而矩阵乘法比较繁复，所以分块计算有较大的实际意义。

5）在矩阵理论的研究中，矩阵的分块是一种最基本、最重要的计算技巧与方法。

例 以对角矩阵Δ_m左乘矩阵$A_{m\times n}$时，把 A 按行分块，有

$$\Delta_m A_{m\times n}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1{}^T \\ \alpha_2{}^T \\ \vdots \\ \alpha_m{}^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1\alpha_1{}^T \\ \lambda_2\alpha_2{}^T \\ \\ \lambda_m\alpha_m{}^T \end{pmatrix},$$

$(\alpha_i^T=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} i=1,2,\dots m)$结果是 A 的每一行乘以$\Delta_m$中的与该行对应的对角元。

问：对角元左乘 A 时，结论如何？

4 转置

设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pt} \end{pmatrix}$，则$A^T=\begin{pmatrix} A_{11}{}^T & A_{21}{}^T & \dots & A_{p1}{}^T \\ A_{12}{}^T & A_{22}{}^T & \dots & A_{p2}{}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1q}{}^T & A_{2q}{}^T & \dots & A_{pq}{}^T \end{pmatrix}$。

即分块矩阵转置时，不但要将行列互换，而且行列互换后的各子矩阵都应转置。

5 一类特殊的分块矩阵－－分块对角矩阵

1）.定义：设 A 为 n 阶方阵，若 A 的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且非零子块都是方阵，即$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，其

中 $A_1, A_2, \ldots A_s$ 都是方阵，那么称 A 为分块对角阵。

2）．性质：

a $|A| = |A_1||A_2|\ldots|A_s|$；

b 若 $|A_i| \neq 0 (i = 1, 2, \ldots, s)$，则有 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$；

c 若 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix}$，其中 $A_i, B_i\ (i = 1, 2, \ldots, s)$ 为同阶子方块，则 $AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sB_s \end{pmatrix}$。

注 分块对角阵的性质在计算中有很广泛的应用，应给予重视。

6 用分块矩阵表示线性方程组：

设线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$ (1)

记 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，　$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，

$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix} = (A \ \vdots \ b)$。

称 A 为系数矩阵；X 为未知数向量；b 为常数项向量；B 为增广矩阵。

若将 A 按行分成 m 块，则线性方程组(1)　AX=B　可记作 $\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，

这就相当于把每个方程 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$　记作 $\alpha_i^T x = b_i\ (i = 1, 2, \ldots, m$）。

如果把 A 按列分成 n 块，则与 A 相乘的 x 应对应按行分成 n 块，从而记作

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \text{，即 } x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n = b.$$

例 证明：若 A 是实对称矩阵且 A^2＝O，那么 A＝O。

证 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，$\because A = A^T$，$\therefore A^TA = A^2 = O$，

把 A 用列向量表示为 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$，则

$$A^TA = A^TA = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \dots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \dots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \dots & \alpha_n^T\alpha_n \end{pmatrix},$$

即 A^TA 的 (i, j) 元为 $\alpha_i^T\alpha_j$，因 $A^TA = A^2 = O$，故

$\alpha_i^T\alpha_j$＝0，$(i, j = 1, 2, \dots, n)$，特殊地有 $\alpha_j^T\alpha_j = 0, (j = 1, 2, \dots, n)$，即

$$\alpha_j^T\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j}, & a_{2j}, & \dots, & a_{mj} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \dots + a_{mj}^2 = 0 \text{ 故得}$$

$a_{1j} = a_{2j} = \dots = a_{mj} = 0, (j = 1, 2, \dots, n),$ 故 $A = O$。

7．用分块矩阵求逆阵

分块矩阵的逆阵依分块方法的不同而有不同的分块形式，去掉分块，结果唯一。这里仅用一例说明一般分块矩阵求逆方法。

例 设 $P = \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$，求 P^{-1}。这里 P 是 n 阶方阵，其中 A,B 分别为 r 阶和 s 阶可逆矩阵，r+s＝n。

证 设矩阵 P 可逆。不妨设 $P^{-1} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$，其中各子块依 P 分法而得，于是 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & I_s \end{pmatrix}$，$I_r, I_s$ 分别表示 r 阶和 s 阶单位阵。

利用分块矩阵乘法，得

$$\begin{cases} AX_1 = I_r \\ AX_2 = O \\ CX_1 + BX_3 = O \\ CX_2 + BX_4 = I_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = A^{-1} \\ X_2 = O \\ X_3 = -B^{-1}CA^{-1} \\ X_4 = B^{-1} \end{cases}$$

，于是 $P^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$ 易知

$PP^{-1} = P^{-1}P = I$　　故矩阵 P 的逆阵

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}。$$

注 利用分块矩阵求逆矩阵的方法，其优点在于把求高阶矩阵的逆矩阵化为求较低阶矩阵的逆矩阵。

思考题 设矩阵 $A = (a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $A^* = A^T$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，A^T 为 A 的转置矩阵。若 a_{11}, a_{12}, a_{13} 为三个相等的正数，求 a_{11} 的值。

作业： p_{66} 3、 4(4)(5)、 5 、10 、11(2)(3) 、12(4)、 15 、16、18、20、 22 、23、26、29（2）、30(2)

第二章　矩阵及其运算习题课

一、本章知识点结构图

- 矩阵
  - 矩阵
  - 矩阵的运算
    - 矩阵的加、减、乘及运算规律
    - 矩阵的转置
    - 方阵的行列式
    - 几种特殊的矩阵
    - 矩阵与行列式的区别
    - 矩阵乘法与实数乘法的区别
  - 逆矩阵
    - 矩阵可逆的充要条件
    - 逆矩阵的求法
      - 伴随矩阵
      - 初等变换法
    - 可逆矩阵的性质
  - 矩阵分块法
    - 分块矩阵的运算规则
    - 分块矩阵求逆矩阵
    - 分块初等矩阵和分块矩阵的初等变换

二、学习要点

本章主要引进矩阵的概念以及它的运算，为用矩阵研究线性方程组的理论及其应用奠定基础。重点是矩阵的运算、逆矩阵，难点是分块矩阵。

矩阵的理论和方法几乎贯穿本课程的始终，矩阵的运算是矩阵广泛应用的基础，我们必须熟练掌握矩阵的各种运算及运算律，注意矩阵运算与实数运算的不同之处。

逆矩阵的概念在矩阵理论中占有重要的位置，利用逆矩阵可求解线性方程组和矩阵方程等。与逆矩阵密切相关的一个概念是伴随矩阵，要掌握它。关于逆矩阵的主要问题有：（1）证明矩阵的可逆性；（2）对可逆矩阵，求它的逆矩阵；（3）对矩阵方程，先化简再求解。

把矩阵分块是处理大型矩阵的有效方法，矩阵分块的原则是既要突出矩阵中元素排列的特点，又要使子块当成元素可以进行运算。矩阵分块不仅是为了计算的方便，也是为讨论问题的需要，例如为了讨论矩阵行（列）向量组的性质，就要把矩阵按行（列）分块。熟练掌握分块矩阵的方法，对于处理许多矩阵问题是很有帮助的。

三、典型例题

1、矩阵的运算及运算律

例 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\\-1&1&-2\end{pmatrix}$ 求 A^n（n 为正整数）。

分析 矩阵 A 中任何两行都对应成比例，那么 A 一定可以表示成一个列矩阵与一个行矩阵的成积。

解 矩阵 A 可以表示为 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\\-1&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1,&-1,&2\end{pmatrix}$。

记 $\alpha=\begin{pmatrix}1,&2,&-1\end{pmatrix}^T,\beta=\begin{pmatrix}1,&-1,&2\end{pmatrix}^T$，则 $A=\alpha\beta^T$，所以

$$A^n=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)...(\alpha\beta^T)=\alpha(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)...(\beta^T\alpha)\beta^T$$

$$=\alpha(-3)^{n-1}\beta^T=(-3)^{n-1}\alpha\beta^T=(-3)^{n-1}A。$$

注 $\alpha\beta^T$（左列乘右行）为一个矩阵，而 $\beta^T\alpha$ 为一个数，有矩阵乘法的运算律可知，作为一个数它可从矩阵乘积中提出来。

例 证明 $\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}$。

解一　用数学归纳法（略）。

解二　记矩阵$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，容易计算得到$B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, B^k=0(k\geq 3)$。

由$A=\lambda E+B$，又 B 与λE是可交换的，故

=

$$A^n=(\lambda E+B)^n=\lambda^n E+n\lambda^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}B^2+...B^n=\lambda^n E+n\lambda^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}B^2$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^n&0&0\\0&\lambda^n&0\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&n\lambda^{n-1}&0\\0&0&n\lambda^{n-1}\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}$$

注 当 A，B 为同阶方阵，且 A 与 B 可交换时，则成立

$(A+B)^n=A^n+C_n^1A^{n-1}B+C_n^2A^{n-2}B^2+...+B^n$。但若$AB\neq BA$，此式一般不成立。解一是归纳法。解二是把 A 分解成两个可交换矩阵的和，且两个新矩阵的 n 次幂都易计算，然后用二项式展开定理求出结果，$B^k=0(k\geq 3)$是重要的。除了这两种方法外，还有递推法或利用相似对角化来求方阵的幂。（见下例）。

例 已知$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$，求$A^k$。

解一（递推法）因为$A^2=AA=\begin{pmatrix}4&&&\\&4&&\\&&4&\\&&&4\end{pmatrix}=2^2E, A^3=A^2A=2^2EA=2^2A$

所以，当k为偶数时，$A^k=(A^2)^{\frac{k}{2}}=(2^2E)^{\frac{k}{2}}=2^kE$

当k为奇数时，$A^k=A^{k-1}A=(2^{k-1}E)A=2^{k-1}A$。

解二 对矩阵 A 有$P^{-1}AP=\Delta$其中

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix},\Delta=\begin{pmatrix}-2&&&\\&2&&\\&&2&\\&&&2\end{pmatrix}$$。因而 $A=P\Delta P^{-1}$, 于是

$$A^k=P\Delta^kP^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}(-2)^k&&&\\&2^k&&\\&&2^k&\\&&&2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-3&1&1\\1&1&-3&1\\1&1&1&-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3+(-1)^k&(-1)^k-1&(-1)^k-1&(-1)^k-1\\(-1)^k-1&3+(-1)^k&(-1)^k-1&(-1)^k-1\\(-1)^k-1&(-1)^k-1&3+(-1)^k&(-1)^k-1\\(-1)^k-1&(-1)^k-1&(-1)^k-1&3+(-1)^k\end{pmatrix}=\begin{cases}2^kE,k\text{为偶数；}\\2^{k-1}A.k\text{为奇数。}\end{cases}$$

例 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，若对任意 n 维列向量 x，均有 $Ax=0$，试证：$A=0$。

证 对 $x=e_j=\left(0,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0\right)^T$（这里第 j 个分量为 1，其余全为零，$j=1,2,\ldots,n$）。由题设条件，有 $Ae_j=0(j=1,2,\ldots,n)$。

由乘法，上式即 $\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\ldots\\a_{nj}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}(j=1,2,\ldots,n)$ 故有 $a_{ij}=0(i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,n)$

此即 $A=0$。

注 凡涉及任意 n 维向量的问题，一般总可以取 n 维向量中一组特殊的向量 $e_1,e_2,\ldots,e_n$ 来加以讨论。

例 设 A 为 n 阶对称矩阵，B 为 n 阶反对称矩阵，证明：AB 为反对称矩阵当且仅当 AB=BA。

证 由题设条件有 $A^T=A,B^T=-B$。所以 AB 为反对称矩阵 $\Leftrightarrow(AB)^T=-AB\Leftrightarrow B^TA^T=-AB\Leftrightarrow(-B)A=-AB\Leftrightarrow BA=AB$。

注 对称矩阵和反对称矩阵是两种重要的特殊方阵，尤其是对称矩阵，应熟悉它们的定义和性质。例如对称矩阵的和、数乘、幂、逆矩阵都还是对称矩阵，但对称矩阵的乘积未必是对称。

2、求方阵的行列式

例 设 4 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta),B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma)$ 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta,\gamma$ 均为 4 维向量。已知 $|A|=1,|B|=4$，求 $|3A-B|$。

解

$$|3A-B|=|3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)-(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma)|=|2\alpha_1,2\alpha_2,2\alpha_3,3\beta-\gamma|$$

$$\overset{c_1\div 2,c_2\div 2}{\underset{c_3\div 2}{========}}8|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,3\beta-\gamma|=8(|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,3\beta|-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma|)$$

$$=8(3|A|-|B|)=-8.$$

注 若$|3A-B|=|3A|-|B|=3|A|-|B|$，这是错误的。

例 设 A 是 n 阶方阵，且满足 $AA^T=E,|A|=-1,$ 证明 $|E+A|=0$。

分析 行列式的值是一个数，要证$|E+A|=0$，只需证明$|A+B|=-|A+B|$。

证 $\begin{aligned}&|E+A|=|AA^T+A|=|A(A^T+E)|=|A||A^T+E|\\&=|A||(A+E)^T|=|A||E+A|=-|E+A|\end{aligned}$ 于是$|E+A|=0$

3、逆矩阵的计算与证明题

求方阵的逆矩阵时，阶数较低的用伴随矩阵法；阶数较低高的用初等变换法。对某些较简单的分块矩阵，也可用分块矩阵的求逆公式。

证明矩阵可逆时常用三种方法：

（1）利用充要条件：$|A|\neq 0$；（2）利用推论（对抽象矩阵）：$AB=E$（3）利用反证法。

例 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\1&1&1&1\\0&0&-1&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$，用分块矩阵求 A^{-1}。

解 把矩阵 A 分块为 $\left(\begin{array}{cc:cc}1&-1&1&-1\\1&1&1&1\\\hdashline ...&...&...&...\\0&0&-1&-1\\0&0&-1&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&C_1\\0&B_1\end{pmatrix}$，其中

$A_1=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},C_1=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},B_1=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$，可知 A_1,B_1,C_1 均可逆，且

$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},B_1^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$。

，又 $-A_1^{-1}C_1B_1^{-1}=-\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，于是

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1 & C_1\\ 0 & B_1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & -A_1^{-1}C_1B_1^{-1}\\ 0 & B_1^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}。$$

例 已知 A 是元素都为 1 的 n 阶矩阵 $(n\geq 2)$，证明：$(E-A)^{-1}=E-\frac{1}{n-1}A.$

证 由 $(E-A)(E-\frac{1}{n-1}A)=E-\frac{1}{n-1}A-A+\frac{1}{n-1}A^2$，而

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n & n & \dots & n\\ n & n & \dots & n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & \dots & n\end{pmatrix}=nA，所以$$

$$(E-A)(E-\frac{1}{n-1}A)=E-\frac{1}{n-1}A-A+\frac{1}{n-1}A=E-(\frac{1}{n-1}+1-\frac{n}{n-1})A=E，$$

故 $\quad(E-A)^{-1}=E-\frac{1}{n-1}A.$

注 由逆矩阵的性质，要验证 B 是方阵 A 的逆矩阵时，只需验证"$AB=E$"和"$BA=E$"两者中的一个就可以。

例 已知 $AP=PB$，其中 $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$。求 A 及 A^5。

解　因为 $|P|=-1\neq 0$，所以矩阵 P 可逆，于是由 $AP=PB$ 得 $A=PBP^{-1}$，又

$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 故 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 6 & -1 & -1\end{pmatrix}$

又 $A^5=(PBP^{-1})^5=(PBP^{-1})(PBP^{-1})\dots(PBP^{-1})=PB^5P^{-1}$，由于 $B^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

所以$B^5=B^4B=(B^2)^2B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=B$

故$A^5=PBP^{-1}=A$。

例　设$A^3=2E$，证明$A+2E$可逆，并求$(A+2E)^{-1}$。

解 由$A^3=2E$，可得$A^3+8E=10E$，即$A^3+(2E)^3=10E$，注意到 A 于 2E 可交换，故有$(A+2E)(A^2-2A+4E)=10E$。由此可知$A+2E$可逆，且$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{10}(A^2-2A+4E)$。

4、与伴随矩阵有关的计算或证明题

例 证明下例命题：

（1）若A,B为同阶可逆矩阵，则$(AB)^*=(BA)^*$。（2）若A可逆，则A^*可逆且$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$。（3）若$AA^T=E,$则$(A^*)^T=(A^*)^{-1}$。

解 （1）因为A,B同阶可逆矩阵，所以$|AB|=|A||B|\neq 0$，即AB可逆，从而，

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{|AB|}(AB)^*$$

于是，

$(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|A||B|B^{-1}A^{-1}=(|B|B^{-1})(|A|A^{-1})=B^*A^*$。

（2）因为A可逆，所以由（1）可得$A^*(A^{-1})^*=(A^{-1}A)^*=E^*=|E|E^{-1}=E$，即$A^*$可逆，且$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$。

（3）由$AA^T=E$，可知A可逆，且$A^{-1}=A^T$。所以由（2）可得

$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=(A^T)^*=|A^T|(A^T)^{-1}=|A|(A^{-1})^T=|A|(\frac{1}{|A|}A^*)^T=(A^*)^T$。

注 n 阶方阵A，总有相应的伴随矩阵A^*，并不依赖于A的可逆性。

例 设 A 为 3 阶方阵，A^*为其伴随矩阵，且$|A|=\frac{1}{2}$,求$|(3A)^{-1}-2A^*|$的值。

解一 因为$(3A)^{-1}=\frac{1}{3}A^{-1},A^*=|A|A^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$，

所以$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-2(\frac{1}{2}A^{-1})\right|=\left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right|=(-\frac{2}{3})^3\left|A^{-1}\right|=(-\frac{2}{3})^3\frac{1}{|A|}=-\frac{16}{27}$。

解二　由$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=2A^*,\left|A^*\right|=|A|^{3-1}=\frac{1}{4}$，

所以$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-2A^*\right|=\left|-\frac{4}{3}A^*\right|=(-\frac{4}{3})^3\left|A^*\right|=(-\frac{4}{3})^3\times\frac{1}{4}=-\frac{16}{27}$

5、解矩阵方程

例 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，求矩阵$X$，使$A^*X=A^{-1}+2X$，其中$A^*$是$A$的伴随矩阵。

分析 在矩阵方程中既出现A^*，有出现A^{-1}，显然要利用A^*与A的关系。

解 由题设$A^*X=A^{-1}+2X$，两边左乘A，得到$|A|X=E+2AX$。（1）

由于$|A|=4$，故方程（1）即为$4X=E+2AX$，移项及提出X，得$(4E-2A)X=E$。

所以$X=(4E-2A)^{-1}=\frac{1}{2}(2E-A)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$。

例 设3阶方阵A,B满足$A^{-1}BA=6A+BA$，其中$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$，求矩阵$B$。

解　由题设$A^{-1}BA=6A+BA$，两端右乘A^{-1}，得$A^{-1}B=6E+B$。经移项并提取B，得到$(A^{-1}-E)B=6E$。由$A^{-1}-E=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix}-E=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，显然。$A^{-1}-E$可逆，且$(A^{-1}-E)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$，所以$B=6(A^{-1}-E)^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

6、分块矩阵

例 设分块矩阵$W=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，其中$A,B,C,D$均为n阶矩阵，且A可逆。证明：（1）$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|$；（2）若$AC=CA,$则$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|$。

分析 由上三角分块矩阵的行列式等于主对角线上个子块行列式的乘积，设法将W化成上三角分块矩阵。

解 （1）由A可逆，作$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$，两端取行列式得到$|W|=|A||D-CA^{-1}B|$。

（2）由矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的乘积，再利用$AC=CA,$得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|=|AD-ACA^{-1}B|=|AD-CAA^{-1}B|=|AD-CB|。$$