第三章　　矩阵的初等变换和线性方程组

第一节　矩阵的初等变换

一、消元法解线性方程组

引例　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, (1) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, (2) \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, (3) \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. (4) \end{cases} \quad ①$$

解：

$$① \xrightarrow[(3)\div 2]{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, (1) \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, (2) \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, (3) \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. (4) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(4)-3(1)]{(2)-(3),(3)-2(1)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, (1) \\ 0x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, (2) \\ 0x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, (3) \\ 0x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. (4) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(4)-3(2)]{(2)\div 2,(3)+5(2)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, (1) \\ 0x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, (2) \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 = -6, (3) \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 = -3. (4) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(4)-2(3)]{(3)\leftrightarrow(4)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, (1) \\ 0x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, (2) \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 = -3, (3) \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0. (4) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(2)-(3)]{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 + 0x_4 = 4, (1) \\ 0x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 = 3, (2) \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 = -3, (3) \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0. (4) \end{cases} \quad ②$$

方程组②是 4 个未知量 3 个有效方程的方程组，应有一个自由未知量，由于方程组②呈阶梯形，可把每个台阶的第一个未知量（即 x_1, x_2, x_4）选为非自由未知量，剩下的 x_3 选为自由未知量。这样，就只需用“回代”的方法便能求出解：由②中（3）得 $x_4 = -3$ 代人（2），得

$x_2 = x_3 + 3$；以 $x_4 = -3$，$x_2 = x_3 + 3$ 代人（1），得 $x_1 = x_3 + 4$。于是解得

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 4, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ x_4 = -3. \end{cases} \begin{cases} x_1 = x_3 + 4, \\ x_2 = x_3 + 3, \\ x_4 = -3. \end{cases}$$

其中 x_3 可任意取值。或令 $x_3 = c$，方程组的解可记作 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix}$，即

$x = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$，其中 c 为任意常数。

注 1、在消元过程中，始终把方程组看做一个整体，着眼于整个方程组变成另一个方程组，其中对方程组施行了三种变换：1)交换两个方程的位置；2）用一个不为零的数乘某一个方程；3）用一个数乘某个方程后加到另一个方程上。称这三种变换为线性方程组的初等变换。由于这三种变换都是可逆的，因此，变换前后的方程组是同解的。

2、在上述变化过程中，实际上，只对方程组的系数与常数进行运算，未知量并未参加运算。因此，若记

$$B = \left(A \ \vdots \ b\right)\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

那么上述对方程组的变换完全可以转换为对矩阵 B 的变换。

把方程组的上述三种初等变换移植到矩阵上，可得矩阵的三种初等变换。

二、矩阵的初等变换

定义 1 下面三种变换称为矩阵的初等行变换：1）对调两行称为互换（对调 i,j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$）；2)以数 $k \neq 0$ 乘以某一行中的所有元素称为倍乘（第 i 行乘 k，记作 $r_i \times k$）；3)把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去称为倍加（第 j 行的 k 倍加到第 i 行，记作 $r_i + kr_j$）。

把定义中的“行”换成“列”，即得矩阵的初等列变换的定义（所用记号是把“r”换成“c”）。 矩阵的初等行变换与初等列变换，统称为矩阵的初等变换。

注 矩阵的初等变换都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换。

矩阵等价

1)定义 2 若矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B，就称矩阵 A 与 B 等价，记作 $A \sim B$。

2)等价关系的性质

反身性　$A \sim A$；　对称性　若 $A \sim B$ 则 $B \sim A$；　传递性　若 $A \sim B, B \sim C$，则 $A \sim C$。

用矩阵的行初等变换解方程组

显然对一个线性方程组施行一个初等变换，相当于对它的增广矩阵施行一个对应的初等行变换。按此观点可把方程组①用消元法到②的过程翻译成对①的增广矩阵施行初等行变换的过程如下：（注：其过程可与消元法过程一一对照）

以上例为例 $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \div 2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = B_1$

$$\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_2-r_3, r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} = B_2$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_2]{r_2 \div 2, r_3+5r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = B_3 \xrightarrow[r_4-2r_3]{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_4$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$　　B_5 对应的方程组为 $\begin{cases} x_1 - x_3 = 4, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ x_4 = -3. \end{cases}$

取 x_3 为自由变量，并令 x_3＝c，即得 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix}$，即 $x=c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$，其中 c 为任意常数。

注　1）一个矩阵与施行初等变换后所得的矩阵一般不相等，所以不能用等号来连接，而是用箭头来连接。

2）B_4, B_5 称为行阶梯形矩阵，其特点为：可画出一条阶梯线，线的下方全为零；每一个台阶只有一行，台阶数既是非零行的行数，阶梯线的竖线（每段竖线的长度为一行）后面的第一个元素为非零元，也就是非零行的第一个非零元。

3) B_5 还称为行最简形矩阵，其特点是：非零行的第一个非零元为 1，且这些非零元所在的列的其他元素都为零。

4)用归纳法可证明，任何矩阵 A＝$\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 总可经过有限次的初等行变换把它

变为行阶梯形和行最简形阵，即若 a_{ij} 不全为零。通过初等行变换能把 A 化为如下行最简形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

。从解线性方程组的角度看，这就是说 m 个线性方程，可化简为 r 个线性方程来求解。至此产生这样一个问题：r 这个数是由原线性方程组所唯一确定，还是随着不同的初等变换过程而变化的？在下一节引入一个概念后可解决此问题。其实行最简形矩阵是由方程组唯一确定的；行阶梯形矩阵的行数也是由方程组唯一确定的。

3)对行最简形矩阵再施以初等列变换，可变为一种形状如下的**标准形**：$A \sim \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$，其特点为：左上角是一个单位矩阵，其余元素全全为零。标准形由 m，n，r 三个数唯一确定，其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数。

例如 $B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_5-4c_1-3c_2+3c_3]{c_3\leftrightarrow c_4,\, c_4+c_1+c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ＝F。

这个结论可由以下定理严格证明：

定理 1 任意一个矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 经过若干次初等变换，可以化为下面形式的矩阵 D。

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}.$$

证明 如所有的 a_{ij} 都是零，则 A 已是 D 的形式（此时 r=0）；如果至少有一个元素不等于零 ，不妨设 $a_{11} \neq 0$（如 $a_{11}=0$，可以对矩阵 A 施以第（1）种初等变换，使左上角元素不等于零）。用 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 乘第一行加于第 i 行上（i=2,…,m),用 $-\frac{a_{1j}}{a_{11}}$

乘所得矩阵的第一列加于第 j 列上（j=2…n），然后以 $\frac{1}{a_{11}}$ 乘第一行，于是矩阵 A 化为

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & B_1 \end{pmatrix}$$

如果 $B_1 = O$，则 A 已化为 D 的形式，如果 $B_1 \neq O$，那么按上面的方法，继续下去，最后总可以化为 D 的形式。

定义 2 D 称为矩阵的**标准形**。

所有与 A 等价的矩阵组成一个集合，称为一个等价类，标准形是这个等价类中形最简单的矩阵。

4．用矩阵的行初等变换解线性方程组的步骤：

1)写出增广矩阵 B； 2)将 B 用行初等变换化为行最简形 F；3)写出 F 对应的方程组；4)写出解。

三、小结

1、行列式与矩阵的初等变换的、阶梯形矩阵、行最简形矩阵、矩阵等价的概念。

2、用矩阵的初等变换解线性方程组的步骤。

四、作业 $P_{79}1(3)(4)$

第二节 初等矩阵

一、概念

定义 3 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。

据此对单位矩阵 E_n 施行三种初等变换所对应的初等矩阵分别为：

1)互换 $E_n \xrightarrow[(或c_i \leftrightarrow c_j)]{r_i \leftrightarrow r_j}$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ & & & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} = E(i,j)。\\ \textbf{i 列} \qquad\qquad \textbf{j 列} \end{array}$$

2)倍乘 $E_n \xrightarrow[(\text{或} kc_i)]{kr_i} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = E(i(k))$。

i 列

3)倍加

a) $i \prec j$ 时 $E_n \xrightarrow[(\text{或} c_j + kc_i)]{r_i + kr_j} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = E(ij(k))$，

i 列　j 列

b) $i \succ j$ 时 $E_n \xrightarrow[(\text{或} c_j + kc_i)]{r_i + kr_j} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & k & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = E(ij(k))$。

j 列　i 列

二、性质

1、初等矩阵为可逆矩阵，且它们的逆矩阵仍为初等矩阵。具体说：

$$E(i,j)^{-1} = E(i,j) \qquad E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k})) \qquad E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))。$$

2、初等矩阵的转置仍为初等矩阵。

3、初等行（列）变换可通过左（右）乘相应的初等矩阵而实现

定理 2　设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行变换相当于在 A 的左边乘一个相应的 m 阶初等矩阵；对 A 施行一次初等列变换相当于在 A 的右边乘一个相应的 n 阶初等矩阵。

证　现在证明交换 A 的第 i 行与第 j 行等于用 $I_m(ij)$ 左乘 A。

将 $A_{m\times n}$ 与 I_m 分块为 $A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix}$

其中 $A_k=\begin{pmatrix} a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}(k=1,2,\dots,m)$

$$\varepsilon_k=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}(k=1,2,\dots,m)$$

k 列

$I_m(ij)\cdot A=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}\cdot A=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 A \\ \varepsilon_2 A \\ \vdots \\ \varepsilon_j A \\ \vdots \\ \varepsilon_i A \\ \vdots \\ \varepsilon_m A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$ 由此可见 $I_m(ij)\cdot A$ 恰好等于矩阵 A 第 i 行与第 j 行互相交换得到的矩阵。

用类似的方法可以证明其它变换的情况。

4、用初等矩阵表示可逆阵

定理 3 方阵 A 可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\dots,P_l$, 使 $A=P_1P_2\dots P_l$。

证明 充分性 设 $A=P_1P_2\dots P_l$，因初等矩阵可逆，有限个可逆矩阵的乘积仍可逆。故 A 可逆。

必有性 设 n 阶方阵 A 可逆，且 A 的标准形矩阵为 D，由于 $D\sim A$，知 D 经有限次初等变换可化为 A，即有初等矩阵 $P_1,P_2,\dots,P_l$,，使 $A=P_1\dots P_sDP_{s+1}\dots P_l$。因为 A 可逆，$P_1,P_2,\dots,P_l$ 也都可逆，故标准形矩阵 D 可逆。假设 $D=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{n\times n}$ 中的 $r\prec n$，则 $|D|=0$，与 D 可逆矛盾，因此必有 $r=n$，即 D＝E，从而 $A=P_1P_2\dots P_l$。

上述证明显示：可逆矩阵的标准形矩阵是单位阵。其实可逆矩阵的行最简形

矩阵也是单位阵，即有

推论 1 方阵 A 可逆的充分必要条件是 $A \sim E$。

证 因 A 可逆的充分必要条件是 A 为有限个初等矩阵的乘积，即 $A = p_1 p_2 \ldots p_l$

亦即 $A = p_1 p_2 \ldots p_l E$ 上式表明 E 经有限次初等变换可变为 A，即 $A \sim E$。

推论 2 $m \times n$ 矩阵 A 与 B 等价的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q，使 $PAQ = B$。

三、初等矩阵的应用

1、利用初等行变换求可逆矩阵的逆阵的方法：

设 $|A| \neq 0$，则存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_l$ 使 $A = p_1 p_2 \ldots p_l$，即有

$p_l^{-1} p_{l-1}^{-1} \ldots p_1^{-1} A = E$ (1) ，两边右乘 A^{-1} 得 $p_l^{-1} p_{l-1}^{-1} \ldots p_1^{-1} E = A^{-1}$（2）。（1）、(2)两式表明：如施行若干个初等行变换将可逆矩阵 A 化为单位矩阵，则同样的初等行变换施行于单位矩阵上就得到 A 的逆矩阵 A^{-1}。从而若构造一个 $n \times 2n$ 的矩阵 $(A \ \vdots \ E)$ 就有 $p_l^{-1} p_{l-1}^{-1} \ldots p_1^{-1} (A \ \vdots \ E) = (E \ \vdots \ A^{-1})$，此式表明对 $(A \ \vdots \ E)$ 施行初等行变换，当左半部矩阵 A 化为单位矩阵时，它的右半部 E 就同时化为 A^{-1}。即有

$(A \ \vdots \ E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \ \vdots \ A^{-1})$。

于是得到一个求逆矩阵的方法如下：

作一个 $n \times 2n$ 的矩阵 $(A \ \vdots \ E)$，若 $(A \ \vdots \ E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \ \vdots \ X)$，则有

1）A 可逆；2)X= A^{-1}。

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$，求 $(E-A)^{-1}$。

解 $(E - A \ \vdots \ E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 6 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -3 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\left(E \ \vdots \ A^{-1}\right)$$，于是

$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

注：以上方法求逆阵，仅施以初等行变换，不得出现初等列变换。

同理可推导出 $\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix} E \\ \cdots \\ A^{-1} \end{pmatrix}$

2、求矩阵方程 Ax=B（$|A|\neq 0$）**较为简便的方法：**

等式 $A^{-1}\left(A \ \vdots \ B\right)=\left(E \ \vdots \ A^{-1}B\right)$，表明施行若干初等行变换将可逆矩阵 A 化为单位矩阵，则同样的初等行变换施行于 B 就得到 $A^{-1}B$。即

$$\left(A \ \vdots \ B\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(E \ \vdots \ A^{-1}B\right)。$$

例 2 设有矩阵方程 $AX=A+2X$，求 X，其中 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$。

解 由 $AX=A+2X$ 得 $(A-2E)X=A$。

$$A-2E=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}。$$

$$(A-2E,A)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

可见 $A-2E\sim E$，因此 $A\sim 2E$ 可逆，且

$$X=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}3 & -8 & -6\\ 2 & -9 & -6\\ -2 & 12 & 9\end{pmatrix}。$$

上面介绍了用初等行变换的方法求 $X=A^{-1}B$，如果要求 $Y=CA^{-1}$，则可对矩阵 $\begin{pmatrix}A\\ C\end{pmatrix}$ 作初等列变换，使 $\begin{pmatrix}A\\ C\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}E\\ cA^{-1}\end{pmatrix}$，即可得 $Y=CA^{-1}$。

三、目前已学习过的求逆阵的方法：

伴随矩阵法　；　　初等变换法。

四、小结

1、初等矩阵的概念。

2、初等矩阵的性质。

3、初等矩阵的应用特别是用初等矩阵求逆矩阵的方法。

五、作业

$p_{79}\,3(2),4(1),5$

第三节　矩阵的秩

一、矩阵的秩的概念。

定义 4　在 $m\times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行 k 列 $(k\le m,k\le n)$，按原矩阵中的位置组成的 k 阶行列式，称为 A 的 k 阶子式。

注　$m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $c_m^k\bullet c_n^k$ 个。

定义 5 设在矩阵 A 中有一个不为零的 r 阶子式 D，且所以 r+1 阶子式（若有）全为零，那么 D 称为 A 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 R(A)。并规定零矩阵的秩为零。

注　1)R(A)是 A 中不为零的子式的最高阶数;

2)R(A^T)$=R(A)$;

3) $R(A_{m\times n})\le\min(n,m)$ 。

4)若 A 有一个 r 阶子式不为零，则 R(A)≥r;

5)若 A 的所有 r+1 阶子式全为零，则 R(A)≤r。

例 3　求 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 6 & 0\end{pmatrix}$ 的秩。

解　$\because\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0$　，且 A 的所以 3 阶子式都为零，故 R(A)＝0。

例 4 求 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & 6 & 6\\ 0 & 2 & -7 & -2 & 53\\ 0 & 0 & 5 & 9 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 的秩。

解 这是阶梯形矩阵，显然 $\begin{vmatrix}1 & -1 & 5\\ 0 & 2 & -7\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix}\neq 0$ 是矩阵的一个最高阶非零子式，故 R(A)＝3。

注 用定义求行、列数很大的矩阵的秩是很不方便的。而阶梯形矩阵的秩等于非零行的行数。

二、利用初等变换求秩的方法

定理 4 若 $A\sim B$，则 $R(A)=R(B)$。

证明 先证明：若 A 经一次初等行变换变为 B，则 $R(A)\leq R(B)$。

设 R(A)＝r，且 A 的某个 r 阶子式 $D_r\neq 0$。

当 $A\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}B$ 或 $A\xrightarrow{r_i\times k}B$ 时，在 B 中总能找到与 D_r 相对应的子式 $\overline{D}_r$，由于 $\overline{D}_r=D_r$ 或 $\overline{D}_r=-D_r$ 或 $\overline{D}_r=kD_r$，因此 $\overline{D_r}\neq 0$，从而 $R(B)\geq r$。

当 $A\xrightarrow{r_i+kr_j}B$ 时，分三种情况讨论：1) D_r 中不含第 i 行；2) D_r 中同时含第 i 行第 j 行；3) D_r 中含第 i 行但不含第 j 行。对 1)、2)两种情形，显然 B 中与 D_r 对应的子式 $\overline{D}_r=D_r\neq 0$，故 $R(B)\geq r$；对情形 3)，由

$$\overline{D}_r=\begin{vmatrix} & \vdots & \\ r_i & +kr_j & \\ & \vdots & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vdots\\ r_i\\ \vdots\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}\vdots\\ r_j\\ \vdots\end{vmatrix}=D_r+k\widehat{D_r},$$

若 $\widehat{D_r}\neq 0$，则因 $\widehat{D_r}$ 中不含第 i 行知 A 中有不含第 i 行的 r 阶非零子式，从而根据情形 1)知 $R(B)\geq r$；若 $\widehat{D_r}=0$，则 $\overline{D}_r=D_r\neq 0$，也有 $R(B)\geq r$。

以上证明了若 A 经一次初等变换变为 B，则 $R(A)\leq R(B)$。由于 B 亦可经一次初等行变换变为 A，故也有 $R(B)\leq R(A)$。因此 $R(A)=R(B)$。

经一次初等行变换矩阵的秩不变，即可知经有限次初等行变换矩阵的秩仍不变。

设 A 经初等列变换变为 B，则 A^T 经初等行变换变为 B^T，由上段证明

$R(A^T)=R(B^T)$，又 $R(A)=R(A^T)$，$R(B)=R(B^T)$，因此 $R(A)=R(B)$。

总之，若 A 经有限次初等变换变为 B，则 $R(A)=R(B)$。

注 现在解答了上节提出的问题：将一个线性方程组的增广矩阵经初等行变换得到的阶梯形矩阵中不全为零的行数 r 即为增广矩阵的秩，从而 r 是由线性方程组唯一确定的。

思考题：在秩为 r 的矩阵中，有没有等于零的 r-1 阶子式？有没有等于零的 r 阶子式？

注 由上定理，求矩阵的秩，只要把矩阵用初等行变换变为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数即是该矩阵的秩。

例 5 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&-1&2\\2&2&2&2&0\\-1&-1&-1&1&1\\1&1&1&0&1\end{pmatrix}$，求 R(A)及一个最高阶非零子式。

解 用初等行变换将 A 化为阶梯形矩阵。

$$A\xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1,\ r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&-1&2\\0&0&0&4&-4\\0&0&0&0&3\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}A\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_4]{r_2-4r_4}\begin{pmatrix}1&1&1&-1&2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

。这个矩阵是行阶梯形矩阵，有三个非零行，所以 r(A)=3。

又$\because$ $B=\begin{pmatrix}\alpha_3&\alpha_4&\alpha_5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\therefore$ R(B)＝3,即 B 中有 3 阶非零子式，

$\because\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&2&0\\-1&1&1\end{vmatrix}\neq 0$，$\therefore$ 它是 A 的一个最高阶非零子式。

三、满秩矩阵

定义 6 设 A$=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，则 1)R(A)＝n 的充要条件为$|A|\neq 0$。2) R(A)<n 的充要条件为$|A|=0$。称 R(A)＝n 的 $n\times n$ 矩阵 A 为满秩矩阵。故可逆矩阵为满秩矩阵，奇异矩阵又称为降秩矩阵。满秩矩阵 A 的标准形为 E,即 $A\sim E$。

四、矩阵秩的性质的归纳总结

1、$0\le R(A_{m\times n})\le\min\{m,n\}$;

2、$R(A^T)=R(A)$；

3、若 $A \sim B,$ 则 $R(A)=R(B)$；

4、若 P 、Q 可逆，则 $R(PAQ)=R(A)$；

5、 $\max\{R(A),R(B)\} \le R(A,B) \le R(A)+R(B)$，特别地，当 $B=b$ 为列向量时，有 $R(A) \le R(A,b) \le R(A)+1$，

证 因为 A 的最高非零子式总是（A,B）的非零子式，所以 $R(A) \le R(A,B)$。同理有 $R(B) \le R(A,B)$。两式合起来，即为 $\max\{R(A),R(B)\} \le R(A,B)$。

设 $R(A)=r, R(B)=t$。把 A 和 B 分别作列变换化为列阶梯形 $\widetilde{A},\widetilde{B}$，则 $\widetilde{A},\widetilde{B}$ 中分别含 r 个和 t 个非零列，故可设 $A \sim \widetilde{A}=(\widetilde{a_1},\ldots,\widetilde{a_r},0,\ldots,0), B \sim \widetilde{B}=(\widetilde{b_1},\ldots,\widetilde{b_t},0,\ldots,0),$ 从而 $(A,B) \sim (\widetilde{A},\widetilde{B}),$ 由于 $(\widetilde{A},\widetilde{B})$ 中只含 r+t 个非零列，因此 $R(\widetilde{A},\widetilde{B}) \le r+t,$ 而 $R(A,B)=R(\widetilde{A},\widetilde{B})$，故 $R(A,B) \le r+t$，即 $R(A,B) \le R(A)+R(B)$。

6、 $R(A+B) \le R(A)+R(B)$

证 不妨设 A、B 为 $m \times n$ 矩阵。对矩阵 $(A+B,B)$ 作列变换 $c_i - c_{n+i} (i=1,\ldots,n),$ 即得 $(A+B,B) \sim (A,B)$，于是 $R(A+B) \le R(A+B,B)=R(A,B) \le R(A)+R(B)$。

7、 $R(AB) \le \min\{R(A),R(B)\}.$

8、若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$，则 $R(A)+R(B) \le n$（见下章）

9、 $R(AB) \ge R(A)+R(B)-n$

例 6 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=E$，证明： $R(E+A)+R(E-A)=n$

证明 由于 $(E+A)(E-A)=E-A^2=0$

故 $R((E+A)(E-A))=0 \ge R(E+A)+R(E-A)-n$，即 $R(E+A)+R(E-A) \le n$

又 $R(E+A+E-A)=R(2E)=n \le R(E+A)+R(E-A)$

所以 $R(E+A)+R(E-A)=n$。

五、小结

1、k 阶子式、矩阵的秩、满秩矩阵的概念。

2、矩阵秩的性质（9 条）。
3、利用初等变换求矩阵的秩的方法。

六、作业 p_{79} 8,9(3),10,11

第三节　　线性方程组的解

一、判定定理

定理 5　n 元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 有非零解的充要条件为 R(A)<n.；只有零解的充要条件 $R(A)=n$。

证明：设 R(A)＝r，不妨设 A 的左上角一个 r 阶子式不为零，这样用行初等变换可将 A 化为如下形式的矩阵 T　即

$$A\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}=\text{T},$$

T 中只含有 r 个非零行。

T 对应的方程组为
$$\begin{cases} x_1+0x_2+\dots+0x_r+c_{1,r+1}x_{r+1}+\dots+c_{1n}x_n=0, \\ 0x_1+x_2+\dots+0x_r+c_{2,r+1}x_{r+1}+\dots+c_{2n}x_n=0, \\ \dots\dots \\ 0x_1+0x_2+\dots+x_r+c_{r,r+1}x_{r+1}+\dots+c_{rn}x_n=0, \\ 0x_1+0x_2+\dots+0x_r+0x_{r+1}+\dots+0x_n=0, \\ \dots\dots \\ 0x_1+0x_2+\dots+0x_r+0x_{r+1}+\dots+0x_n=0. \end{cases}\quad (2)$$

1)若 r=n　方程组中如有恒等式就去掉，成为

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ \dots\dots \\ x_n=0 \end{cases}$$

即 r=n $\Leftrightarrow$ 无自由未知量 $\Leftrightarrow$ 只有零解。

2）若 r<n　方程组中如有恒等式就去掉，成为
$$\begin{cases} x_1+c_{1,r+1}x_{r+1}+\dots+c_{1n}x_n=0, \\ x_2+c_{2,r+1}x_{r+1}+\dots+c_{2n}x_n=0, \\ \dots\dots \\ x_r+c_{r,r+1}x_{r+1}+\dots+c_{rn}x_n=0. \end{cases}$$
移

项得

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{rn}x_n. \end{cases}$$

这表明 $x_{r+1},\ldots,x_n$ 可作为自由未知量。因此这时(2)，从而方程组 Ax=b 有无穷多解。这时解的全体，即通解可表示为

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{rn}x_n, \text{其中 } c_1, c_2, \ldots c_{n-r} \text{ 为任意常数。} \\ x_{r+1} = c_1, \\ \ldots\ldots \\ x_n = c_{n-r}. \end{cases}$$

注 本定理所述条件 r<n 的必要性是克莱姆定理的推广（克莱姆定理只适用于 m=n 的情形），其充分性则包含了克莱姆定理的逆定理。

推论 当 $m \prec n$ 时，$A_{m\times n}x = 0$ 有非零解。

证明 因为 $r(A) \le \min(m,n) = m \prec n,$ 由上定理知其有非零解。

定理 6 n 元非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x = b$（3）有解的充要条件为 $R(A) = R(B)$，其中 $B = \left(A \ \vdots \ b\right)$。

证明 设 R(A)＝r，不妨设 A 的左上角一个 r 阶子式 $\neq 0$，用行变换将 B 化为标准形，若 $R(A) \neq R(B)$

$$B \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & & & c_{1r+1} & \ldots & c_{1n} & \vdots & 0 \\ & \ddots & & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & c_{rr+1} & \ldots & c_{rn} & \vdots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \vdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} = T_1$$

T_1 对应的与（3）同解方程组中，第 r+1 个方程为 $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 1$ 是矛盾方

程，所以（3）无解，其逆亦真。

若 $R(A)=R(B)$

$$B\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix} 1 & & & c_{1r+1} & \dots & c_{1n} & \vdots & d_1 \\ & \ddots & & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & c_{rr+1} & \dots & c_{rn} & \vdots & d_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}=T_2$$

1)若 $R(A)=R(B)$ ＝r=n　此时

$$B\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & d_1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & \vdots & d_n \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)} ＝T_3$$

（3）有唯一解 $\begin{cases} x_1=d_1 \\ x_2=d_2 \\ \dots\dots \\ x_n=d_n \end{cases}$

2)若 $R(A)=R(B)$ ＝r<n　，T_2 对应的与(3)同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1+c_{1,r+1}x_{r+1}+\dots+c_{1n}x_n=d_1, \\ x_2+c_{2,r+1}x_{r+1}+\dots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \dots\dots \\ x_r+c_{r,r+1}x_{r+1}+\dots+c_{rn}x_n=d_n. \end{cases}$$

(3)的通解为 $\begin{cases} x_1=d_1-c_{1,r+1}x_{r+1}-\dots-c_{1n}x_n, \\ x_2=d_2-c_{2,r+1}x_{r+1}-\dots-c_{2n}x_n, \\ \dots\dots \\ x_r=d_r-c_{r,r+1}x_{r+1}-\dots-c_{rn}x_n, \\ x_{r+1}=c_1, \\ \dots\dots \\ x_n=c_{n-r}. \end{cases}$　$x_{r+1},\dots x_n$ 可以作为自由未知量

所以 $R(A)=R(B)$ ＝r<n 时，(3)有无穷多解，反之亦然 。由 1)、2)，显然有，若 $R(A)=R(B)$，则(3)有解，其逆亦真。

推论 1) $R(A)=R(B)$＝r=n $\Leftrightarrow$ $A_{m\times n}x=b$有唯一解。

2) $R(A)=R(B)$＝r<n$\Leftrightarrow$ $A_{m\times n}x=b$有无穷多解。

注 从上述证明可看出或$R(A)=R(B)$，或$R(B)=R(A)+1$。所以有结论：矩阵添加一列，则其秩或不变，或增加 1。

二、求解方程组的方法

齐次线性方程组：系数矩阵化为行最简形矩阵，便可写出其通解。

非齐次线性方程组：1)对增广矩阵 B 作初等行变换，判断是否有解。2)若有解，化成行最简形矩阵，选定 n-r 个自由未知量移到等号右边，写出通解。

例 7 解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_3-x_4-3x_5=0, \\ x_1+2x_2-x_3-x_5=0, \\ 4x_1+6x_2-2x_3-4x_4+3x_5=0, \\ 2x_1-2x_2+4x_3-7x_4+4x_5=0. \end{cases}$$

解 对系数矩阵 A 施行初等行变换变为行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & -7 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$。得与原方程同解的方程组

$$\begin{cases} x_1+x_3-6x_5=0, \\ x_2-x_3+\frac{5}{2}x_5=0, \\ x_4-3x_5=0 \end{cases}$$ 由此即得 $$\begin{cases} x_1=-x_3+6x_5, \\ x_2=x_3-\frac{5}{2}x_5, \\ x_4=3x_5, \end{cases}$$ （x_3,x_5可任意取值）。

令$x_3=c_1, x_4=c_2$，的通解的参数形式 $$\begin{cases} x_1=-c_1+6c_2, \\ x_2=c_1-\frac{5}{2}c_2, \\ x_3=c_1, \\ x_4=3c_2, \\ x_5=c_2. \end{cases}$$

其中c_1,c_2为任意常数，或写成向量形式$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -c_1+6c_2 \\ c_1-\frac{5}{2}c_2 \\ c_1 \\ 3c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$。

例 8 解线性方程组$\begin{cases} x_1+x_3-x_4-3x_5=-2 \\ x_1+2x_2-x_3-x_5=1 \\ 4x_1+6x_2-2x_3-4x_4+3x_5=7 \\ 2x_1-2x_2+4x_3-7x_4+4x_5=1 \end{cases}$

解 对增广矩阵施行初等行变换化为阶梯形。

$$\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & \vdots & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -4 & 3 & \vdots & 7 \\ 2 & -2 & 4 & -7 & 4 & \vdots & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-4r_1}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & \vdots & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 6 & -6 & 0 & 15 & \vdots & 15 \\ 0 & -2 & 2 & -5 & 10 & \vdots & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & \vdots & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 12 & \vdots & 8 \end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{3}r_3]{r_4-\frac{4}{3}r_3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & \vdots & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}=T$$

这表明$r(A)=r\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}=3$，未知量个数＝5。故$r(A)=r\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}\prec$未知量个数。所以此方程组有无穷多解，且有 5-3=2 个自由未知量。由于矩阵 T 的第一，第二，第三行；第一，第二，第四列组成的 3 阶子式不为零，我们对它再施行初等行变换化为行最简形。

$$T\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 & \vdots & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 5 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 & \vdots & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & \vdots & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}。$$

该矩阵所对应的线性方程组为$\begin{cases} x_1+x_3-6x_5=-4 \\ x_2-x_3+\frac{5}{2}x_5=\frac{5}{2} \\ x_4-3x_5=-2 \end{cases}$

可将x_3,x_5作为自由未知量，移项得$\begin{cases} x_1=-4-x_3+6x_5 \\ x_2=\dfrac{5}{2}+x_3-\dfrac{5}{2}x_5 \\ x_4=-2+3x_5 \end{cases}$

所以通解可表示为$\begin{cases} x_1=-4-c_1+6c_2 \\ x_2=\dfrac{5}{2}+c_1-\dfrac{5}{2}c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=-2+3c_2 \\ x_5=c_2 \end{cases}$ 其中c_1,c_2为任意常数。

特别要指出的是若当$r(A)=r\begin{pmatrix}A & b\end{pmatrix}=r\prec n$时，A 中不为零的 r 阶子式未必唯一，如上例中 T 的第一，第二，第三行；第一，第三，第四列的 3 阶子式也不为零。也可以对它再进行化简，同样可得到方程组的通解，此时无非自由未知量是x_2,x_5而已。虽然这两个通解表达形式不一样，但两者所表示的解集合是相同的，所以都可作为原线性方程组的通解。

例 9 解线性方程组$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x+5y-z=-4 \\ 3x-2y-z=5 \end{cases}$

解 首先化增广矩阵为行最简形

$$\begin{pmatrix}A & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & 5 & -1 & \vdots & -4 \\ 3 & -2 & -1 & \vdots & 5 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -10 \\ 0 & -8 & -4 & \vdots & -4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

$r(A)=r\begin{pmatrix}A & b\end{pmatrix}$＝3 故有唯一解

还原为同解方程组$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$，唯一解为$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$。

例 10 解线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=4 \\ 2x_1+3x_2+3x_3-x_4=3. \\ 5x_1+7x_2+4x_3+x_4=5 \end{cases}$

解 化增广矩阵为阶梯形

$$\begin{pmatrix}A & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 3 & \vdots & 4\\ 2 & 3 & 3 & -1 & \vdots & 3\\ 5 & 7 & 4 & 1 & \vdots & 5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 3 & \vdots & 4\\ 0 & 1 & 7 & -7 & \vdots & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -5\end{pmatrix}$$

由上行阶梯形矩阵观察，$r(A)\neq r\begin{pmatrix}A & b\end{pmatrix}$，故方程组无解。

例 11 设有线性方程组$\begin{cases}x_1+x_3=2\\ x_1+2x_2-x_3=0\\ 2x_1+x_2-ax_3=b\end{cases}$

（1）确定当 a，b 分别为何值时，方程组无解，有唯一解，有无穷多解；

（2）在有解时求出解。

解 （1）

$$\begin{pmatrix}A & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & \vdots & 2\\ 1 & 2 & -1 & \vdots & 0\\ 2 & 1 & -a & \vdots & b\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & \vdots & 2\\ 0 & 2 & -2 & \vdots & -2\\ 0 & 1 & -a-2 & \vdots & b-4\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & \vdots & 2\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -1\\ 0 & 1 & -a-2 & \vdots & b-4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & \vdots & 2\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -1\\ 0 & 0 & -a-1 & \vdots & b-3\end{pmatrix}。$$

由此可知，当 $a=-1$ 且 $b\neq 3$ 时，$r(A)=2,r\begin{pmatrix}A & b\end{pmatrix}=3$，故方程组无解；当 $a\neq -1$ 时，$r(A)=r\begin{pmatrix}A & b\end{pmatrix}=3$，方程组有唯一解；当 $a=-1$ 且 $b=3$ 时，$r(A)=r\begin{pmatrix}A & b\end{pmatrix}=2\prec 3$，方程组有无穷多解。

（2）当 $a\neq -1$ 时，有

$$\begin{pmatrix}A & b\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & \vdots & 2\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -1\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \dfrac{3-b}{a+1}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & \dfrac{2a+b-1}{a+1}\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \dfrac{2-a-b}{a+1}\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \dfrac{3-b}{a+1}\end{pmatrix},$$

唯一解为$\begin{cases}x_1=\dfrac{2a+b-1}{a+1}\\ x_2=\dfrac{2-a-b}{a+1}\\ x_3=\dfrac{3-b}{a+1}\end{cases}$。

当$a=-1$且$b=3$时$\begin{pmatrix}A & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & \vdots & 2\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$,

得最简同解方程组$\begin{cases}x_1=2-x_3\\ x_2=-1+x_3\end{cases}$。

故方程组的解为$\begin{cases}x_1=2-c\\ x_2=-1+c\\ x_3=c\end{cases}$ （c 为任意常数）。

三、 矩阵方程

定理 7 矩阵方程$AX=B$有解的充分必要条件是$R(A)=R\left(A,B\right)$。

证 设A为$m\times n$矩阵，B为$m\times l$矩阵，则X为$n\times l$矩阵。把X和B按列分块，记为$X=(x_1,x_2,...,x_l)$，$B=(b_1,b_2,...,b_l)$, 则矩阵方程$AX=B$等价于l个向量方程$Ax_i=b_i(i=1,2,...,l)$.

充分性。设$R(A)=R\left(A,B\right)$，由于$R(A)\le R(A,b_i)\le R(A,B)$,

故有$R(A)=R(A,b_i)$，从而l个向量方程$Ax_i=b_i(i=1,2,...,l)$.都有解，于是矩阵方程$AX=B$有解。

必要性 设矩阵方程$AX=B$有解，从而l个向量方程$Ax_i=b_i(i=1,2,...,l)$.都有解，设解为

$x_i=\begin{pmatrix}\lambda_{1i}\\ \lambda_{2i}\\ \\ \lambda_{ni}\end{pmatrix}(i=1,2,...,l)$.记$A=(a_1,a_2,...,a_n)$, 即有$\lambda_{1i}a_1+\lambda_{2i}a_2+...+\lambda_{ni}a_n=b_i$.

对矩阵$(A,B)=(a_1,a_2,...,a_n,b_1,...b_l)$

作初等列变换 $c_{n+i}-\lambda_{1i}c_1-...-\lambda_{ni}c_n(i=1,2,...,l)$，

便把(A,B)的第 n+1 列、…、n+l列都变为 0，即$(A,B)\sim(A,O)$，

因此$R(A)=R\left(A,B\right)$。

定理 8 设$AB=C$，则$R(C)\le\min\{R(A),R(B)\}$。

证 因$AB=C$，知矩阵方程$AX=C$有解$X=B$，由上定理有$R(A)=R(A,C)$。

而 $R(C)\le R(A,C)$，因此 $R(C)\le R(A)$。

又 $B^TA^T=C^T$，由上段证明知有 $R(C^T)\le R(B^T)$，即 $R(C)\le R(B)$。

综合便得 $R(C)\le \min\{R(A),R(B)\}$。

上两定理的应用，将在下一章讨论。

定理 9 矩阵方程 $A_{m\times n}X_{n\times l}=O$ 只有零解的充分必要条件是 $R(A)=n$。

这定理阐明了矩阵乘法消去律成立的条件。

思考题：已知齐次方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+3x_2+5x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$（**1**）**和** $\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$

同解，求 a,b,c **的值。**

四、小结

1、线性方程组的解的判定定理（齐次、非齐次）。

2、求线性方程组解的方法。

3、矩阵方程有解的充要条件。

五、作业 p_{80}12(3),13(2),14,,16,17,19

第三章 矩阵的初等变换和线性方程组习题课

一、本章知识点结构图

- 第三章
  - 矩阵的初等变换
    - 矩阵乘以非零数
    - 把矩阵的某一行（或列）的倍数加到另一行（列）
    - 互换两行（或列）的位置
  - 初等矩阵
    - 三种初等矩阵
    - 初等矩阵的性质
    - 利用初等矩阵求逆矩阵
  - 矩阵的秩
    - 矩阵秩的定义
    - 四个等价定义（部分内容在下一章）
    - 矩阵秩的性质
    - 矩阵秩的求法
  - 线性方程组的解
    - 一般线性方程组有解的条件
      - 无解
      - 唯一解
      - 无穷多解
    - 齐次方程组的解
      - 唯一解
      - 无穷多解

二、学习要点

本章基本要求：了解：矩阵的秩的概念、矩阵等价的概念和初等矩阵的性质。理解：线性方程组有解判别定理。掌握：1)矩阵的初等变换、及其标准形、用初等变换化矩阵为阶梯形矩阵及求矩阵的秩和逆矩阵的方法。2)用矩阵的初等行变换解线性方程组的消元法。

重点是矩阵的秩与矩阵的初等变换、线性方程组解的理论与求解方法。

用初等变换化矩阵为阶梯形矩阵体现了数学的一个基本思想：把讨论对象化简，阶梯形矩阵反映很多原矩阵的性质，因而用初等变换化矩阵为阶梯形矩阵是本课程中用得最多的一种变换，它在其它问题中也有重要的应用，所以要熟练掌握初等变换的方法及用初等变换解决其他问题的方法。初等矩阵与初等变换有密切的联系，务必分清对某个矩阵左乘（右乘）初等矩阵与初等变换的关系。

矩阵的秩是本课程的重要概念之一。通过秩把矩阵与行列式、线性方程组及 n 维向量紧密联系起来，它反映了矩阵行（列）向量组中向量之间的关系，从而矩阵的秩在很多问题上有广泛的应用。所以要深刻理解矩阵的秩的概念及有关性质，掌握用初等变换求矩阵的秩的方法，并逐步掌握用矩阵的秩解决有关问题的方法。

线性方程组理论是本课程的重要内容之一，关于它主要问题是：1)判别非齐次线性方程组是否有解？判别齐次线性方程组是否有非零解？2)有解时，有多少个解？3)有无穷多解时，解的结构是怎样的？4)如何求出全部解？

三、典型例题

1、矩阵的初等变换与初等矩阵

例 12 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_{11}-2a_{13} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21}-2a_{23} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31}-2a_{33} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix}$。求矩阵 X，使 $A=BX$ 。

分析 由 A 经过两次初等列变换化成 B，故可以通过初等矩阵求出 X 。

解 对矩阵 A，先将第三列的（－2）倍加到第一列上，再交换第二、三列就得矩阵 B，故取两个初等矩阵 $P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

则有 $AP_1P_2=B$，于是 $A=BP_2^{-1}P_1^{-1}=BX$, 所以 $X=P_2^{-1}P_1^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。

例 13 设 n 阶矩阵 A 可逆，将 A 的第 i 行和 j 列互换后所得矩阵记为 B。（1）证明 B 可逆；（2）求 AB^{-1}。

解　（1）由题设条件，$|B|=-|A|\neq 0$。所以，矩阵 B 可逆。

（2）以 $P(i,j)$ 表示交换单位矩阵 E 的第 i，j 行得到的初等矩阵，则有 $B=P(i,j)A$。因而 $AB^{-1}=A[P(i,j)A]^{-1}=AA^{-1}P(i,j)^{-1}=P(i,j)$。

2、求矩阵的秩及有关证明题

例 14 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{pmatrix}$，其中 a,b 为参数，求 $r(A)$。

解一　$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{vmatrix}=(a-1)(4-2b)$，

则：当 $a\neq 1$ 且 $b\neq 2$ 时，$|A|\neq 0$，所以 $r(A)=4$；

当 $a\neq 1$，$b=2$ 时，由于

$$AB\ A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}，所以，r(A)=3。$$

当 $a=1$，$b\neq 2$ 时，由于

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\2&3&1&4\\3&5&1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&0&0&2-b\\0&0&0&0\end{pmatrix}，所以，r(A)=3。$$

当 $a=1$，$b=2$ 时，由于

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\2&3&1&4\\3&5&1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}，所以 r(A)=2。$$

解二　用矩阵的初等行变换将 A 化为阶梯形，即

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 2-b \end{pmatrix}。$$

故有　当$a \neq 1$且$b \neq 2$时，$r(A)=4$；当$a \neq 1$，$b=2$时，$r(A)=3$；

当$a=1$，$b \neq 2$时，$r(A)=3$；当$a=1$，$b=2$时，$r(A)=2$。

例 15（填空题）(1) 设A为4×3矩阵，且$r(A)=2, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则$r(AB)$

＝（　　　）。(2) 设$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{pmatrix}$，其中$a_i \neq 0, b_i \neq 0 (i=1,2,\dots,n)$, 则

$r(A)=$（　　）。

解　(1) 因为$|B|=10$，所以B为可逆矩阵，由秩的性质，$r(AB)=r(A)=2$。

(2) 显然　$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\left(b_1, \quad b_2, \quad \dots, \quad b_n\right)$。

记$\alpha=\left(a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n\right)^T, \beta=\left(b_1, \quad b_2, \quad \dots, \quad b_n\right)^T$，则$A=\alpha\beta^T$。

由于α, β均为非零列向量，故$r(\alpha)=r(\beta)=1,$ 所以

$r(A) \leq \min\{r(\alpha), r(\beta)\}=1$。又$A$为非零矩阵，故$r(A)\geq 1$。这样$r(A)=1$。

例 16 设A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵，证明当$m \succ n$时，必有$|AB|=0$。

解一　由题设AB为 m 阶矩阵，且$r(A)\leq n \prec m$，所以AB是降秩矩阵，即有

$|AB|=0$。

解二　看齐次线性方程组$BX=0$，这是一个 n 个方程 m 个未知量的方程组。当$n \prec m$时，$BX=0$有非零解，从而方程组$ABX=0$也有非零解。由于AB是 m 阶方阵，则必有$|AB|=0$。

注　本题给出了证明某个方阵的行列式等于零的两个方法，或证明该方阵是

降秩的，或证明相应的齐次线性方程组有非零解。

3、关于线性方程组的解的判定与消元法

例 17 A是$m\times n$矩阵，$Ax=0$是非齐次线性方程组$Ax=b$对应的导出方程组，则下列结论正确的是（　　）

（A）若$Ax=0$仅有零解，则$Ax=b$有唯一解；

（B）若$Ax=b$有唯一解，则$Ax=0$仅有零解；

（C）若$Ax=0$有非零解，则$Ax=b$有无穷多解；

（D）若$Ax=b$无解，则$Ax=0$仅有零解。

解　由于A为$m\times n$矩阵，故$Ax=0$与$Ax=b$均为 n 元线性方程组。

对于（A），由于$Ax=0$仅有零解$\Leftrightarrow r(A)=n$。

当A是 n 阶方阵时，也就有$r(A,b)=n$，这时$Ax=b$有唯一解。但对于一般的$m\times n$矩阵A，就不一定保证$r(A,b)=n$。例如，方程组$\begin{pmatrix}1&2\\0&3\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$仅有零解。但方程组$\begin{pmatrix}1&2\\0&3\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$无解。故（A）不正确。

对于（C），与（A）类似，由$Ax=0$有非零解$\Leftrightarrow r(A)=r\prec n$。但不能保证$r(A,b)=r$，即当若$Ax=0$有非零解，$Ax=b$可能无解。例如，方程组$\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$有非零解，但方程组$\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$无解。故（C）不正确。

对于（B），由于$Ax=b$有唯一解$\Leftrightarrow r(A,b)=r(A)=n$，所以也就由$r(A)=n$可知，$Ax=0$仅有零解。故（B）正确。

对于（D），由于$Ax=b$无解$\Leftrightarrow r(A,b)\neq r(A)$。因而无法确定$r(A)$与 n 的关系，即由$Ax=b$无解，对应的$Ax=0$可能仅有零解，也可能有非零解。在上面对（A），（C）的分析中已举出了例题。故（D）不正确。

例 18 设A为$m\times n$实矩阵，$n\prec m$。证明：当非齐次线性方程组$Ax=b$有唯一解时，矩阵A^TA是可逆矩阵。

分析 由A^TA是 n 阶矩阵，为证A^TA可逆，只需证明A^TA的秩为 n，即需证明方程组$(A^TA)x=0$只有零解。

证 由题设$Ax=b$有唯一解可知，与其对应的齐次线性方程组$Ax=0$只有零解。若$A^TA\prec n$，那么方程组$(A^TA)x=0$有非零解，即存在非零向量x_0，使

$(A^T A)x_0 = 0$。从而 $x_0^T(A^T A x_0) = (x_0^T A^T)(A x_0) = 0,$ 即有 $Ax_0 = 0$。这说明方程组 $Ax = 0$ 有非零解，与题设矛盾。所以 $A^T A$ 的秩为 n，即 $A^T A$ 是可逆矩阵。

4、含有参数的线性方程组的讨论与求解

例 19（填空题）（1）已知方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解，则 $a =$（　　）。

解一　利用矩阵的初等变换。方程组的增广矩阵 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a+1)(a-3) & a-3 \end{pmatrix}$

可知 $a = -1$ 时，$R(\overline{A}) = 3, r(A) = 2$，$r(\overline{A}) \neq R(A)$，方程组无解。

解二　利用克来姆法则。系数行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} = -(a-3)(a+1)$，可知

当 $a = -1$ 时，由于 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$，$r(\overline{A}) \neq R(A)$，无解。

当 $a = 3$ 时，由于 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$r(\overline{A}) = R(A) = 2 \prec n = 3$，有无穷多解。

（2）设方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多解，则 a =（　　）。

解　$\overline{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 0 & (a+2)(1-a) & 4+2a \end{pmatrix}$。可知

当 $a = -2$ 时，$r(\overline{A}) = R(A) = 2 \prec n = 3$，方程组有无穷多解。

例 20　当 a, b 为何值时，方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ 有解？并在有解时，求出方程组的解。

分析 本题中参数出现在未知量 x_1, x_2 的系数中，则对其增广矩阵施行行初等变换较为麻烦。再由本方程组适合克来姆法则使用的条件，故从计算方程组的系数行列式入手。

解 由计算方程组的系数行列式

$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix} = b(1-a)$ 可知，当 $a \neq 1$ 且 $b \neq 0$ 时，$|A| \neq 0$，方程组有唯一解，利用克来姆法则，可求出唯一解为 $x_1 = \dfrac{2b-1}{b(a-1)}, x_2 = \dfrac{1}{b}, x_3 = \dfrac{1-4b+2ab}{b(a-1)}$.

当 $b=0$ 时，由 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $r(\bar{A}) = 3, r(A) = 2$，方程组无解。

当 $a=1$ 时，由 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2b \end{pmatrix}$。

当 $a=1$ 且 $b \neq \dfrac{1}{2}$ 时，$r(\bar{A}) \neq R(A)$，方程组无解；

当 $a=1$ 且 $b = \dfrac{1}{2}$ 时，$r(\bar{A}) = R(A) = 2$，方程组有无穷多解。此时，可容易求出方程组的一般解为 $\begin{cases} x_1 = 2 - x_3, \\ x_2 = 2, \end{cases}$ x_3 为自由未知量。