第四章　向量组的线性相关性

§1 向量组及其线性组合

在解析几何中,我们讨论过二维、三维空间中的向量，向量的加法运算及向量与数的乘法，将其推广，我们可以得到n维向量的概念及其线性运算。

一、n维向量

1、n维向量的概念

定义1　n个有次序的数$a_1, a_2 \cdots a_n$所组成的数组称为n维向量，这n个数称为该向量的n个分量，第i个数a_i称为第i个分量

分量全为实数的向量称为实向量，分量为复数的向量称为复向量，今后除特别指明外，一般我们只讨论实向量。

2、n维向量的表示方法

n维向量写成一列，称为列向量，也就是列矩阵，通常用α, β, a, b等表示，

n 维向量写成一行，称为行向量，也就是行矩阵，$\alpha^T, \beta^T, a^T, b^T$规定行向量与列向量都按矩阵的运算规律进行运算。

几何中，“空间”通常是作为点的集会，即作为“空间”的元素是点，这样的空间叫做点空间，我们把三维向量的全体所组成的集合

$R^3 = \left\{ r = \left(x, y, z\right)^T \middle| x, y, z, \in, R \ \right\}$叫做三维向量空间。在点空间取坐标系以后，空间中的点$P(x, y, z)$与三维向量$r = (x, y, z)^T$之间有一一对应的关系，因此，向量空间可以类比为取定了坐标系的点空间。在讨论向量的运算时，我们把向量看作有向线段；在讨论向量集时，则把向量r为向径的点P，从而把点P的轨迹作为

向量集的图形，例如点集$\Pi=\left\{P(x,y,z)\middle|ax+by+cz=d\right\}$是一个平面（a, b, c 不全为 0），于是向量集$\left\{r=\left(x,y,z\right)^T\middle|ax+by+cz=d\right\}$也叫做向量空 R^3 中的平面，并把Π作为它的图形.

类似地，n 维向量的全体所组成的集合

$R^n=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T\middle|x_1,x_2,\cdots x_n\in R\right\}$叫做 n 维向量空间。n 维向量的集合

$\left\{x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T\right)\left|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b\right\}$叫做 n 维向量空间 R^n 中的 n-1 维超平面。

3、向量组与矩阵

若干个同维数的列（行）向量所组成的集合叫向量组。矩阵$A=(a_{ij})mxn$有 m 个 n 维行向量或 n 个 m 维列向量。反之，由有限个向量所组成的向量组可以构成一个矩阵。m 个 n 维列向量所组成的向量组：a_1，$a_2,\cdots a_m$,构成一个nxm矩阵$A=(\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots\alpha_m)$；

m 个 n 维行向量所组成的向量组 B: $\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_m^t$构成一个$mxn$矩阵

$B=\begin{pmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\\\vdots\\\beta_m^t\end{pmatrix}$总之，含有限个向量的有序向量组可以与矩阵一一对应。

二、线性组合

定义 2 给定向量组 A：a_1，$a_2,\cdots a_m$,对于任何一组实数$k_1,k_2,\cdots k_m$，表达式$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m$称为向量组 A 的一个线性组合，$k_1,k_2,\cdots k_m$称为这个线性组合的系数。

给定向量组 A：α_1，$\alpha_2,\cdots\alpha_m$，和向量 b，如果存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m$ 使 $b=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_m a_m$ 则称 b 可由 α_1，$\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性表示。向量 b 能由向量组 A 线性表示，也就是方程组 $x_1 a_1+x_2 a_2+\cdots x_m a_m=b$ 有解，从而可得

定理 1　向量 b 能由向量组 A：a_1，$a_2,\cdots a_m$，线性表示的充分必要条件是矩阵 $A=(\alpha_1，\alpha_2,\cdots\alpha_m)$ 的秩等于矩阵 $B=(\alpha_1，\alpha_2,\cdots\alpha_m,\mathrm{b})$ 的秩。

定义 3 设有两个向量组 $A:a_1$，$\mathrm{a}_2,\cdots a_m$ 及 $\mathrm{B}:\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\cdots,\mathrm{b}_\mathrm{L}$，若 B 组中的每个向量都能由向量组 A 线性表示，则称向量组 B 能由向量 A 线性表示。若向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示，则称这两个向量组等价。

把向量组 A 和 B 所构成的矩阵依次记作 $A=(a_1，\mathrm{a}_2,\cdots a_m)$ 和 $B=(\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\cdots,\mathrm{b}_\mathrm{L})$，B 组能由 A 组线性表示，即对每个向量 $\mathrm{b}_\mathrm{j}(j=1,2,\cdots,l)$ 存在数 $k_{1j},k_{2j},\cdots k_{mj}$，使

$$b_j=k_{1j}a_1+k_{2j}a_2+\cdots+k_{mj}a_m=\left(\alpha_1，\alpha_2,\cdots\alpha_m\right)\begin{pmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{mj}\end{pmatrix}$$

从而 $(\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\cdots,\mathrm{b}_\mathrm{L})=\left(a_1，a_2,\cdots a_m\right)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1l}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2l}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\k_{m1}&k_{m2}&\cdots&k_{ml}\end{pmatrix}$

这里，矩阵 $k_{mxl}=(k_{ij})$ 称这一线性表示的系数矩阵。

由此可知，若 $c_{mxn}=A_{mxl}b_{lxn}$，则矩阵 C 的列向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示，B 为这一表示的系数矩阵：

$$(c_1,c_2,\cdots,c_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_l)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

同时，C 的行向量组能由 B 的行向量组线性表示，A 为这一表示的系数矩阵：

$$\begin{pmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ \vdots \\ r_m^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_l^T \end{pmatrix}$$

设矩阵 A 与 B 行等价，即矩阵 A 经初等行变换变成矩阵 B，则 B 的每个行向量都是 A 的行向量的线性组合，即 B 的行向量组能由 A 的行向量组线性表示。由于初等变换可逆，知矩阵 B 可经初等行变换变为 A，从而 A 的行向量组也能由 B 的行向量组线性表示。于是 A 的行向量组与 B 的行向量组等价。

类似可知，若矩阵 A 与 B 列等价，则 A 的列向量组与 B 的列向量组等价。

由定义 3　向量组 $B:\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\cdots,\mathrm{b}_L$ 能由向量组 $A:a_1$，$a_2,\cdots a_m$ 线性表示，即存在矩阵 k_{mxl}，使 $(b_1,\cdots,b_l)=(a_1,\cdots,a_m)k$，也就是矩阵方程

$(a_1$，$a_2,\cdots a_m)x=$（$\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\cdots,\mathrm{b}_L$）有解，由上章定理 7　，立即可得

定理 2　向量组 $B:\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\cdots,\mathrm{b}_L$ 能由向量组 $A:a_1$，$a_2,\cdots a_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $A=(a_1$，$a_2,\cdots a_m)$ 的秩等于矩阵 $(A,B)=(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_l)$ 的秩，即 $R(A)=R(A,B)$。

推论　向量组 $A_1:a_1$，$a_2,\cdots a_m$ 与向量组 $B:\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\cdots,\mathrm{b}_L$ 等价的充分必要条件是 $R(A)=R(B)=R(A,B)$，其中 A 和 B 是向量组 A 和 B 所构成的矩阵。

证 因 A 组与 B 组可相互线性表示，由定理 2，知它的等价的充分必要条件是 $R(A)=R(A,B)$ 且 $R(B)=R(B,A)$，而 $R(A,B)=R(B,A)$，合起来即得充分必要条件为 $R(A)=R(B)=R(A,B)$。

例 1 设 $a_1=(1,1,2,2)^T, a_2=(1,2,1,3)^T, a_3=(1,-1,4,0)^T, b=(1,0,3,1)^T$，证明向量 b 能由向量组 a_1,a_2,a_3 线性表示，并求出表示式。

解 根据定理 1，要证矩阵 $A=(a_1,a_2,a_3)$与$B=(A,b)$ 的秩相等，为此，把 B 化成行最简形：

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-2r_1}}{\underset{r_4-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&-1&2&1\\0&1&-2&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可见，$R(A)=R(B)$，因此，向量 b 能由向量组 a_1,a_2,a_3 线性表示。由上列行最简形，可得方程 $(a_1,a_2,a_3)x=b$ 的通解为

$x=c(-3,2,1)^T+(2,-1,0)^T=(-3c+2,2c-1,c)^T$，其中 C 可任意取值。求得表示式为

$\mathrm{b}=(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_3)\mathrm{x}=(-3\mathrm{c}+2)\mathrm{a}_1+(2\mathrm{c}-1)\mathrm{a}_2+\mathrm{c}\mathrm{a}_3$

例 2 设 $\begin{matrix}a_1=(1,-1,1,-1)^T, a_2=(3,1,1,3)^T, b_1=(2,0,1,1)^T,\\ b_2=(1,1,0,2)^T b_3=(3,-1,2,0)^T\end{matrix}$，证明向量组 a_1,a_2 与向量组 b_1,b_2,b_3 等价。

证 记 $A=(a_1,a_2), B=(b_1,b_2,b_3)$。根据定理 2 的推论，只要证

$R(A)=R(B)=R(A,B)$，为此把矩阵（A，B）化成行阶梯形：

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\-1&1&0&1&-1\\1&1&1&0&2\\-1&3&1&2&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&4&2&2&2\\0&-2&-1&-1&-1\\0&6&3&3&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&2&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可见，$R(A)=2, R(A,B)=2$，易看出矩阵 B 中有不等于 0 的 2 阶子式，故 $R(B)\geq 2$，又 $R(B)\leq R(A，B)=2$，于是 $R(B)=2$，因此

$R(A)=R(B)=R(A,B)$

定理 3 设向量组 $B: \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \cdots, \mathrm{b}_L$ 能由向量组 $A: a_1，a_2, \cdots a_m$ 线性表示，则 $R(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \cdots, \mathrm{b}_L)\leq R(a_1，a_2, \cdots a_m)$。

证 记 A=$(a_1，a_2, \cdots a_m)$，$B=(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \cdots, \mathrm{b}_L)$，按定理的条件，根据定理 2 有 $R(A)=R(A,B)$，而 $R(B\leq R(A,B)$，因此 $R(B)\leq R(A)$。

由上述各定理可得重要结论：

向量组 $B: \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \cdots, \mathrm{b}_L$ 能由向量组 $A: a_1，a_2, \cdots a_m$ 线性表示 $\leftrightarrow$ 有矩阵 K，使 $B=AK\leftrightarrow$ 方程 $AX=B$ 有解。

例 3 设 n 维向量组 $A: a_1，a_2, \cdots a_m$ 构成 nxm 矩阵 $A=(a_1，a_2, \cdots a_m)$，n 阶单位矩阵 $E=(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的列向量叫做 n 维单位坐标向量。证明：n 维单位坐标向量组 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 能由向量组 A 线性表示的充分必要条件是 $R(A)=n$。

证 根据定理 2，向量组 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 能由向量组 A 线性表示的充分必要条件是 $R(A)=R(A,E)$

而 $R(A,E)\geq R(E)=n$，又矩阵 (A,E) 含 n 行，知 $R(A,E)\leq n$，合起来有 $R(A,E)=n$，因此 $R(A)=R(A,E)=n$，

本例用方程的语言可叙述为：

方程 $A_{nxm}X=E_n$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=n$，

本例用矩阵的语言可叙述为：

对矩阵 $Amxn$，存在矩阵 $Qnxm$，使 $AQ=E_m$ 的充分必要条件是 $R(A)=m$；对矩阵 $Amxn$，存在矩阵 $Pnxm$，使 $PA=E_n$ 的充分必要条件是 $R(A)=n$，显然，当 $m=n$ 时，P、Q 便是 A 的逆阵，故上述结论可看作是逆阵概念的推广。

三、小结

1、向量、向量组、线性组合及向量组等价的的概念。

2、向量线性表示的判定方法：定义及三个定理。

四、作业，P108、2、3、4、5。

§2 向量组的线性相关性

一、线性相关与线性无关的概念

定义 4　给定向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$，如果存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1a_1+k_2a_2+\cdots k_ma_m=0$$

则称向量组 A 是线性相关的，否则称它线性无关。

注（1）向量组只含一个向量 a 时，若 $a=0$，则 a 线性相关，若 $a\neq 0$，则 a 线性无关。

（2）包含零向量的任何向量组是线性相关的。

（3）任一向量组，不是线性相关就是线性无关。

（4）含有两个向量的向量组，它线性相关的充要条件是两向量的分量对应成比例，几何意义是两向量共线；三个向量线性相关的几何意义是三向量共面。

（5）向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m(m\geq 2)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示。

（6）若向量组中部分向量线性相关，则整个向量组线性相关。

（7）若整个向量组线性无关，则其中任何部分向量组一定线性无关。

二、线性相关性的判定

线性相关性在线性方程组中的应用：若方程组中有某个方程是其余方程的线性组合时，这个方程就是多余的，这时称该方程组（各个方程）是线性相关的；若方程组中没有多余方程，就称该方程组（各个方程）线性无关（或线性独立）。

结论：向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 构成矩阵 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$，向量组 A 线性相关，就是齐次线性方程组 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m=0$，即 $AX=0$，有非零解，由上章定理 6，即可得

定理 4　向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 的秩小于向量个数 m；向量组 A 线性无关的充分必要条件是 $R(A)=m$。

例 4 试讨论 n 维单位坐标向量组的线性相关性。

解 n 维单位坐标向量组构成的矩阵，$\mathrm{E}=(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \cdots, \mathrm{e}_n)$ 是 n 阶单位矩阵，由 $|E|=1\neq 0$，知 $R(E)=n$，即 $R(E)$ 等于向量组中的向量个数，由定理 4 知此向量组是线性无关的。

例 5 已知 $\mathrm{a}_1=(1,1,1,)^{\mathrm{T}}$，$a_2=(0,2,5)^T$，$a_3=(2,4,7)$，试讨论向量组 a_1, a_2, a_3 及向量组 a_1, a_2 的线性相关性：

分析 对矩阵 (a_1, a_2, a_3) 施行初等行变换变成行阶梯形矩阵，即可同时看出矩阵 (a_1, a_2, a_3) 及 (a_1, a_2) 的秩，利用定理 4 即可得出结论

解：$(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\underset{r_3-r}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&5&5\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

可见，$R(a_1,a_2,a_3)=2$，$R(a_1,a_2)=2$，故向量组a_1,a_2,a_3线性相关，向量组a_1,a_2线性无关。

例 6　已知向量组a_1,a_2,a_3线性无关，$b_1=a_1+a_2,b_2=a_2+a_3,b_3=a_3+a_1$试证向量组$b_1,b_2,b_3$线性无关。

证　设有x_1,x_2,x_3使$x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=0$，

即$x_1(a_1+a_2)+x_2(a_2+a_3)+x_3(a_3+a_1)=0$

即$(x_1+x_3)a_1+(x_1+x_2)a_2+(x_2+x_3)a_3=0$，因$a_1,a_2,a_3$线性无关，

故有$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_1+x_2=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$

由于此方程组的系数行列式$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$故方程组只有零解$x_1=x_2=x_3=0$，所以向量组$b_1,b_2,b_3$线性无关。

思考　设$a_1,a_2,\cdots,a_n$线性无关，试讨论向量组$a_1+a_2,a_2+a_3,\cdots,a_{n-1}+a_n,a_n+a_1$的线性相关性。

线性相关性是向量组的一个重要性质，下面介绍与之有关的一些简单的结论。

定理 5　（1）若向量组$A:a_1,a_2,\cdots,a_m$线性相关，则向量组$B:a_1,\cdots a_m,a_{m+1}$也

线性相关，反之，若向量组 B 线性无关，则向量组 A 也线性无关。

（2）m 个 n 维向量组成的向量组，当维数 n 小于向量个数 m 时一定线性相关，特别地，n+1 个 n 维向量一定线性相关。

（3）设向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性无关，则向量 $B: a_1, \cdots a_m$，b 线性相关，则向量 b 必能由向量组 A 线性表示，且表示式是唯一的。

证 仅证（3），（1），（2）自证

记 $A=(a_1,\cdots,a_m)$， $B=(a_1,\cdots a_m,b)$ 有 $R(A)\le R(B)$，因 A 组线性无关，有 $R(A)=m$；因 B 组线性相关，有 $R(B)<m+1$。所以 $m\le R(B)<m+1$，即有 $R(B)=m$；由 $R(A)=R(B)=m$，根据上章定理 4，知方程组 $(a_1,\cdots a_m)x=b$ 有唯一解，即向量 b 能由向量组 A 线性表示，且表示式是唯一的。

例 7　设向量组 a_1,a_2,a_3 线性相关，向量组 a_2,a_3,a_4 线性无关，证明

（1）a_1 能由 a_2,a_3 线性表示。

（2）a_4 不能由 a_1,a_2,a_3 线性表示。

证（1）因 a_2,a_3,a_4 线性无关，由定理 5（1）知 a_2,a_3 线性无关，而 a_1,a_2,a_3 线性相关，由定理 5（3）知 a_1 能由 a_2,a_3 表示。

（2）用反证法，假设 a_4 能由 a_1,a_2,a_3 表示，而由（1）知 a_1 能由 a_2,a_3 表示，因此 a_4 能由 a_1,a_2,a_3 线性表示，这与 a_2,a_3,a_4 线性无关矛盾。

三、小结

1、线性相关与线性无关的概念。

2、线性相关与线性无关的判定方法。

（1）定义法　首先假设常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots k_ma_m=0$ 成立，根

据已知条件来推断，若仅当$k_1,k_2,\cdots,k_m$全为0前式才成立，则判定$a_1,a_2,\cdots,a_m$线性无关；否则，判定$a_1,a_2,\cdots,a_m$线性相关。

（2）秩法　结合向量组秩讨论，若向量组的秩小于向量组中向量的个数，则判定向量组线性相关；否则判定向量组线性无关。

（3）行列式法　特别当向量组中向量的个数与向量的维数相同时，可将向量组组成方阵，通过判断该方阵的行列式是否为0，判定向量组线性相关还是无关，若行列式为0，则向量组线性相关，若不等于0。，则向量组线性无关。

（4）反证法　假设向量组线性相关（或无关），推出矛盾。

（5）等价性方法　通过讨论一个与原向量组等价的，较易判定线性相关性的新向量组的方法，来讨论原向量组的线性相关性。

四、作业　P108、6、（2）、7、8、11

§3　向量组的秩

一、向量组的最大无关组

定义5　设有向量组A，如果在A中选出r个向量$a_1,a_2,\cdots,a_r$，满足

（1）向量组$A_0:a_1,a_2,\cdots,a_r$线性无关；

（2）向量组A中任意$r+1$向量（如果A中有$r+1$个向量的话）都线性相关，则称向量组A。是向量组A的一个最大线性无关组（简称最大无关组）；最大无关组所含向量个数r称为向量组A的秩。记作R_A。

注　（1）只含零向量的向量组没有最大无关组，规定它的秩为0。

（2）一个向量组如果是线性无关的，则它的最大无关组就是它本身。

二、矩阵与向量组秩的关系

定理 6 矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩。

证 设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，$R(A)=r$ 并设 r 阶子式 $D_r\neq 0$。由 $D_r\neq 0$ 知 D_r 所在的 r 列线性无关；又由 A 中所有 $r+1$ 阶子式均为零，知 A 中任意 $r+1$ 个列向量都线性相关，因此 D_r 所在的 r 列是 A 的列向量组的一个最大无关组，所以列向量组的秩等于 r。

类似可证矩阵 A 的行向量组的秩也等于 $R(A)$

结论 若 D_r 是矩阵 A 的一个最高阶非零子式，则 D_r 所在的 r 列即是列向量组的一个最大无关组，D_r 所在的 r 行即是行向量组的一个最大无关组。

注：（1）定理 6 将矩阵和向量两个联系起来，提供了用矩阵的初等变换求向量秩的方法。

（2）最大无关组不一定唯一，但它的最大无关组中含有向量个数唯一。

（3）向量组 A 与它的最大无关组 A 是等价的，其逆命题也是成立的，现在把它作为定理 3 的推论叙述如下

推论（最大无关组的等价定义）设向量组 $\mathrm{A}_0:\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\cdots\mathrm{a}_r$ 是向量组 A 的一个部分，且满足

（I）向量组 A_0 线性无关；

（II）向量组 A 的任一向量都能由向量组 A_0 线性表示。

那么向量组 A_0 便是向量组 A 的一个最大无关组。

证 只要证明向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量线性相关，设 $b_1,b_2,\cdots,b_{r+1}$ 是 A 中任意 $r+1$ 个向量，由条件（II）知这 $r+1$ 个向量能由向量组 A。线性表示，从而根据定理 3，有 $R(b_1,b_2,\cdots,b_{r+1})\leq R(a_1,a_2,\cdots,a_r)=r$，再根据定理 4 知 $r+1$ 个向

量$b_1, b_2, \cdots, b_{r+1}$线性相关，因此向量组 A。满足定义 5 所规定的最大无关组的条件。

例 8　全体 n 维向量构成的向量组记作R^n，求R^n的一个最大无关组及R^n的秩。

解　在例 4 中，已证明了 n 维单位出标向量构成的向量组$E: e_1, e_2, \cdots, e_n$是线性无关的，又根据定理 5 的结论（2），知R^n中的任意$n+1$个向量都线性相关，因此向量组 E 是R^n的一个最大无关组，且R^n的秩等于 n，

例 9　设齐次线性方程$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

的全体解向量构成的向量组为 S，求 S 的秩。

解　先解方程，为此把系数矩阵 A 化成行最简形：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \underset{r_3 - r_1}{\overset{r_2 - 2r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$得

$\begin{cases} x_1 = 3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$令自由未知数$x_3 = c, x_4 = c_2$得通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

把上式记作$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$，知$\mathrm{S} = \{ \mathrm{c}_1\xi_1 + \mathrm{c}_2\xi_2 \mid \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 \in \mathrm{R} \}$，即 S 能由向量组$\xi_1, \xi_2$线性表示。又因$\xi_1, \xi_2$的四个分量不成比例，故$\xi_1, \xi_2$线性无关，由最大无关组等价定义得$\xi_1, \xi_2$是 S 的最大无关组，从而$R_s = 2$。

三、向量组秩的重要结论

设向量组$A:a_1,a_2,\cdots,a_m$构成矩阵$A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，根据向量组的秩的定义及定理 6，有$R_A=R(a_1,a_2,\cdots,a_m)=R(A)$，由此可知，前面介绍的定理 1、2、3、4 中出现的矩阵的秩都可改为向量组的秩，如定理 2 可叙述为

定理 2　向量$b_1,b_2,\cdots,b_l$能由向量组$a_1,a_2,\cdots,a_m$线性表示的充分必要条件是

$$R(a_1,a_2,\cdots,a_m)=R(a_1,\cdots a_m,b_1,\cdots b_l)$$

这里记号$R(a_1,a_2,\cdots,a_m)$既可理解为矩阵的秩，也可理解成向量组的秩。前面我们建立定理 1、2、3 时，限制向量组只含有限个向量，现在我们要去掉这一限制，把定理 1、2、3 推广到一般情形，推广的方法是利用向量的最大无关组作过渡。下面仅推广定理 3，定理 1 和 2 的推广请大家自行完成。

定理 3　若向量组 B 能由向量组 A 线性表示，则$\mathrm{R_B}\le\mathrm{R_A}$。

证　设$R_A=s,R_B=t$，并设向量组 A 和 B 的最大无关组依次为

$$\mathrm{A_0:a_1,a_2,\cdots,a_s}\text{和}\mathrm{B_0:b_1,b_2,\cdots,b_t}$$

由于B_0组能由 B 组表示，B 组能由 A 组表示，A 组能由A_0组表示，因此B_0组能由A_0组表示，根据定理 3，有$R(b_1,b_2,\cdots,b_t)\le R(a_1,a_2,\cdots,a_s)$，即$t\le s$。

今后，定理 3 和 3^1 将不加区别，都称定理 3，定理 1 和 2 推广后的定理也不加区别。

例 10　设向量组 B 能由向量组 A 线性表示，且它的秩相等，证明向量组 A 与向量组 B 等价。

证　设向量组 A 和 B 合并成向量组 C，根据定理 2，因 B 组能由 A 组表示，故$R_A=R_C$，又已知$R_B=R_A$，故有$R_A=R_B=R_C$，根据定理 2 的推论，知 A 组

与 B 组等价。

例 1　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}$

求矩阵 A 的列向量的一个最大无关组，并把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示。

解　对 A 施行初等行变换变为行阶梯形矩阵（见第每三章§1 引例）

$$A\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

知 $R(A)=3$，故列向量组的最大无关组含 3 个向量，而三个非零行的非零首元在 1，2，4 三列，故 a_1,a_2,a_4 为列向量组的一个最大无关组，这是因为

$$(a_1,a_2,a_4)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

知 $R(a_1,a_2,a_4)=3$，故 a_1,a_2,a_4 线性无关。

为把 a_3,a_5 用 a_1,a_2,a_4 线性表示，把 A 再变成行最简形矩阵

$$A\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

把上列行最简形矩阵记作：$B=(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)$，由于方程

$Ax=0$与$Bx=0$同解，即方程 $x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3+x_4a_4+x_5a_5=0$ 与

$x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3+x_4b_4+x_5b_5=0$同解，因此向量$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$之间与向量$b_1,b_2,b_3,b_4,b_5$之间有相同的线性关系，现在$b_3=-b_1-b_2$，$b_5=4b_1+3b_2-3b_4$，因此$a_3=-a_1-a_2$， $a_5=4a_1+3a_2-3a_4$。

注 本例解法的好处不仅可以求出最大无关组，而且直接可以用最大无关组表示其余的向量，但在矩阵的变换过程中必须用行变换。

四、小结

1、向量组的最大无关组的概念。

2、矩阵的秩与向量组的秩的关系；矩阵的秩=矩阵列向组的秩=矩阵行向量组的秩。

3、求向量组的秩以及最大无关组，一般可以从以下四个方面来考虑：

（1）以定义为基础进行考察

（2）转化为矩阵的秩来考察

（3）利用等价的向量组具有相等的秩来考察

（4）利用有关向量组的秩的基本结论来考察。

五、作业 P109、13（1）、14（2）、15、19

§4 线性方程组的解的结构

一、齐次线性方程组解的性质

1、解向量的的概念

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

则（1）式写成向量方程 $Ax = 0$ （2）

若 $x_1 = \xi_{11}$， $x_2 = \xi_{21}$， $\cdots x_n = \xi_{n1}$ 为（1）的解，则

$$x = \xi_1 = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix}$$

称为方程组（1）的解向量，它也就是向量方程（2）的解。

2．齐次线性方程组解的性质

性质 1. 若 $x = \xi_1$， $x = \xi_2$ 为(2)的解, 则 $x = \xi_1 + \xi_2$ 也是(2)的解.

证　只需验证 $x = \xi_1 + \xi_2$ 满足方程(2)

$$A(\xi_1 + \xi_2) = A\xi_1 + A\xi_2 = 0 + 0 = 0$$

性质 2　若 $x = \xi_1$ 为(2)的解, k 为实数, 则 $x = K\xi_1$ 也是(2)的解

证　$A(k\xi_1) = k(A\xi_1) = k0 = 0$

二 基础解系及其求法

1、基础解系的定义

设 ξ_1 、 ξ_2、$\cdots$ ξ_t 是齐次线性方程组（1）的一组解，如果满足

① ξ_1 、ξ_2、… ξ_t线性无关；

②齐次线性方程组（1）的任一解都可由ξ_1 、ξ_2、… ξ_t线性表示，

则ξ_1 、ξ_2、… ξ_t称为齐次线性方程组（1）的一个基础解系

如果ξ_1 、ξ_2、… ξ_t为齐次线性方程组（1）的一组基础解系，则齐次线性方程组（1）的通解可表示为$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_t\xi_t$其中$k_1\cdots k_t$是任意常数。

2、齐次线性方程组基础解系的求法

设方程组（1）的系数矩阵 A 的秩为 r，并不妨设 A 的前 r 个列向量线性无关，

于是 A 的行最简形矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} 1\cdots 0 & b_{11}\cdots & b_1,n\text{-}r \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots 1 & b_{r1}\cdots & b_r,n\text{-}r \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

与B对应,即有方程组
$$\begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1} & - & \cdots & -b_{1,n-r}\ x_n, \\ \cdots \quad \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1} & - & \cdots & -b_{r,n-r}\ x_n. \end{cases} \qquad (3)$$

由于 A 与 B 的行向量等价，故方程组（1）与（3）同解，在（3）中，任给x_{r+1}，…，x_n一组值，即唯一确定$x_{1,}\cdots,x_r$的值，就得（3）的一个解，也就是（1）的解，现对x_{r+1}，…，x_n取下列$n-r$组数：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

由（3）即依次可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix},$$

从而求得（3）[也就是（1）]的 n-r 个解。

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

下面证明$\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r}$是方程组（1）的基础解系。

（1）证明$\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r}$线性无关。

由于 n-r 个 n-r 维向量$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$线性无关，所以$n-r$个$n$维向量$\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r}$也线性无关。

（2）证明方程（1）的任一解都可由$\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r}$线性表示。

设$x = \xi = (\lambda_{1,} \cdots \lambda_{r,} c_1 \cdots c_{n-r})^T$为方程组（1）的任一个解。再作$\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r}$的线性组合$\eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r,}$ 由于$\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r}$是（1）的解，故$\eta$也是（1）的解，

比较η与ξ,知它们的后面$n-r$个分量对应相等，由于它们都满足方程组（3）从而知它们的前面 r 个分量亦必对应相等,因此$\eta=\xi$,即$\eta=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r},$

所以，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是齐次线性方程组的基础解系。

由以上的计论，可推得

定理 1 设 m×n 矩阵 A 的秩 R(A)=r,则 n 元齐次线性方程组 Ax=o 的解集 S 的秩 Rs=n-r.

注 （1）基础解系不唯一，但它们之间的关系是等价的。

（2）基础解系是方程组（1）的解集 s 的一个最大无关组。

（3）当 R(A)=n 时，方程组（1）只有零解，因而没有基础解系，而当 R(A)=r＜n 时，方程组（1）的基础解系含 n-r 个解向量。

（4）若$\xi_1,\xi_2\cdots\xi_{n-r}$是方程组（1）的一个基础解系，则其通解为

$x=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r},$其中$c_1,c_2,\cdots c_{n-r}$是任意常数。

例 12 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+3x_4+7x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ \qquad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$$

的基础解系与通解。

解对系数矩阵 A 作初等行变换，变为行最简形矩阵，有

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&3&7\\3&2&1&1&-3\\0&1&2&2&6\\5&4&3&3&-1\end{pmatrix}\underset{r_4-5r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&3&3&7\\0&-4&-8&-8&-24\\0&1&2&2&6\\0&-6&-12&-12&-36\end{pmatrix}\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&3&3&7\\0&1&2&2&6\\0&-4&-8&-8&-24\\0&-6&-12&-12&-36\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4+6r_2}{\overset{r_3+4r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&3&3&7\\0&1&2&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_1-2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5\\0&1&2&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由于 R（A）=2，n=5，所以基础解系中含 n-R（A）=3 个解向量，同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=x_3+x_4+5x_5\\x_2=-2x_3-2x_4-6x_5\end{cases}\qquad(*)$$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

代入同解方程组得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$

从而得基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}，\quad \xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}，\quad \xi_3=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

故方程组的通解为

$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$，其中 k_1，k_2，k_3 为任意实数。

注：上面的解法是先求基础解系，再写出通解；除上述方法外，用下面的方法更简便。

将同解方程组（*）改写为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

再将它改写成向量形式，并令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2, x_4 = c_3$，使得方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in R)$$

例 13 设 $A_{mxn}B_{nxl} = 0$, 证明 $R(A) + R(B) \le n.$

证：记 $B = (b_1, b_2, \cdots, b_l)$, 则
$A(b_1, b_2, \cdots, b_l) = (0, 0, \cdots, 0)$, 即 $Ab_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, l)$

表明矩阵 B 的 l 个列向量都是齐次方程 $Ax = 0$ 的解，记方程 $Ax = 0$ 的解集为 s，由 $b_i \in s$ 知有 $R(b_1, b_2, \cdots b_l) \le R_S$, 即 $R(B) \le R_S$. 而由定理 7 有 $R(A) + R_S = n$，故 $R(A) + R(B) \le n$

例 14 证明矩阵 A_{mxn} 与 B_{lxn} 的行向量组等价的充分必要条件是齐次方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解。

证 必要性是显然的。

充分性 设方程 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解，从而也与方程 $\begin{cases} Ax = 0 \\ Bx = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{pmatrix} A \\ \mathrm{B} \end{pmatrix} X = 0$ 同解，设解集 S 的秩为 t，则三个系数矩阵的秩都为 $n - t$，故

$R(A)=R(B)=R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$,即$R(A^T)=R(B^T)=R(A^T,B^T)$

根据§1 的定理 2 推论，知A^T与B^T的列向量组等价，即 A 与 B 的行向量组等价。

例 15 证 A 为 mxn 矩阵，x 为 n 维列向量，证明 $R(A^TA)=R(A)$

若 x 满足 $Ax=0$，则有 $A^T(Ax)=0$,即$(A^TA)X=0$

若 x 满足$\left(A^TA\right)X=0$,则$X^T(A^TA)X=0$,即$(AX)^T(AX)=0$,从而推知$AX=0$。

综上可知方程组$AX=0$与$\left(A^TA\right)X=0$同解，因此$R(A^TA)=R(A)$

三、非齐次线性方程组的性质

设有非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (4)$$

它也可写作向量方程 $Ax=B$ (5)

向量方程（5）的解也就是方程组（4）的解向量。

1、非齐次线性方程组的性质

性质 3 设$x=\eta_1$及$x=\eta_2$都是（5）的解，则$x=\eta_1-\eta_2$为对应的齐次线性方程组

$AX=0$ (6)的解。

证 $A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0$，即$x=\eta_1-\eta_2$满足方程（6）

性质 4 设$x=\eta$是方程（5）的解，$x=\xi$是方程（6）的解，则$x=\xi+\eta$仍是方程（5）的解。

证$A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=0+b=b$，即$x=\xi+\eta$满足方程（5）

2、非齐次线性方程组的解

非齐次线性方程组 $Ax=b$ 解的情形归纳如下：

（1）若 $R(A)\neq R(B)$，则方程组 $Ax=b$ 无解；

（2）若 $R(A)=R(B)=r$，则方程组 $Ax=b$ 有解；

①当 $r=n$ 时，方程解 $Ax=b$ 有唯一解；

②当 $r<n$ 时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，其通解为

$x=k_1\xi_1=k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*\qquad (k_1,k_2\cdots k_{n-r}$为任意实数)

其中 $\xi_1,\xi_2\cdots\xi_{n-r}$ 是对应齐次方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，η^* 是 $Ax=b$ 的一个特解。

例 16 求解方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2\qquad\qquad +x_4=-1\\ x_1+3x_2-7x_3+4x_4=3\\ 3x_1-2x_2+x_3+x_4=-2\end{cases}$

解：对增广矩阵 B 施行初等行变换；

$$B=\begin{pmatrix}2&-1&0&1&-1\\1&3&-7&4&3\\3&-2&1&1&-2\end{pmatrix}\overset{r_1\longleftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&-7&4&3\\2&-1&0&1&-1\\3&-2&1&1&-2\end{pmatrix}\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r}{\sim}}\begin{pmatrix}1&3&-7&4&3\\0&-7&14&-7&-7\\0&-11&22&-11&-11\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2\div(-7)}{\overset{r_3-\frac{11}{7}r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&3&-7&4&3\\0&1&-2&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_1-3r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0\\0&1&-2&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因为 $R(A)=R(B)=2<n=4$，所以方程组有无穷多解，它的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 + 1 \end{cases} \qquad (*)$$

求方程组的通解有两种方法：

解一 取 $x_3 = x_4 = 0$ 代入方程组（*）得 $x_1 = 0 \quad x_2 = 1$，即得方程组的一个特解 $\eta^* = (0.1.0.0)^T$ 。

在对应的齐次方程组 $\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 \end{cases}$ 中, 取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

则 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 即得对应齐次线性方程组的基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

于是所求通解为 $x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (C_1, C_2 \in R)$

解二 将方程组（*）改写为 $\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 + 1 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = \quad x_4 \end{cases}$

再将上式用向量形式表示，并令 $x_3 = c, x_4 = c_2$，即得原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in R)$$

例 17 设 η_1, η_2, η_3 为非齐次线性方程组 $Ax = b$（1）的解，且 $k_1 + k_2 + k_3 = 1$，证明 $x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$ 也是（1）的解。

证 因为 $k_1+k_2+k_3=1$，有 $k_3=1-k_1-k_2$，于是

$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3=k_1\eta_1+k_2\eta_2+(1-k_1-k_2)\eta_3=k_1(\eta_1-\eta_3)+k_2\left(\eta_2-\eta_3\right)+\eta_3$ 因为

η_1,η_2,η_3 为（1）的解，由非齐次线性方程组的性质 1 知，$\eta_1-\eta_3$，$\eta_2-\eta_3$ 为（1）对应的齐次方程组成 $Ax=0$ （2）的解，由齐次线性方程组的性质知，$k_1(\eta_1-\eta_3)+k_2\left(\eta_2-\eta_3\right)$ 仍为（2）的解。由非齐次线性方程组解的性质 2 得

$x=k_1(\eta_1-\eta_3)+k_2\left(\eta_2-\eta_3\right)+\eta_3$ 为（1）的解。

推广，设 $\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_S$ 为（1）的解，且 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$，则 $x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ 仍为（1）的解。

四、小结

1、齐次线性方程组解的性质。

2、齐次线性方程基础解系的求法。

3、非齐次线性方程组解的性质。

4、线性方程组解的情况。

五、作业 P110、22（1）、23、26、28（1）、29

§5 向量空间

一、向量空间的概念

定义 6 设 v 为 n 维向量的集合，如果集合 v 非空，且集合 v 对于加法及乘数两种运算封闭，那么称集合 v 为向量空间。

注 1、集合 v 对于加法及乘数两种运算封闭是指：若 a，b∈v，则 a + b∈v；

若 a∈v，$\lambda \in R$, 则$\lambda \in v$。

2、n 维向量的集合是一个向量空间，记作 R^n。

例 18 集合$V=\left\{x=(0,x_2,\ldots,x_n)^T \middle| x_2,\ldots,x_n \in R\right\}$是一个向量空间。因为若

$a=(0,a_2,\ldots a_n)^T \in V, b=(0,b_2\ldots b_n)^T \in V,$ 则 $a+b=(0,a_2+b_2,\cdots a_n+b_n)^T \in V,$

$\lambda a=(0,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_a)^T \in V$

例 19 集合 $V=\left\{x=(1,x_2,\cdots x_n)^T \mid x_2\cdots x_n \in R\right\}$不是向量空间，因为若

$a=(1,a_2,\cdots a_n)^T \in V$，则$2a=(2,2a_{2,}\cdots,2a_n)^T \notin V$。

例 20 齐次线性方程组的解集$S=\{x \mid Ax=0\}$是一个向量空间（称为齐次线性方程组的解空间）。因为由齐次线性方程组的解的性质 1，2，知其解集 S 对向量的线性运算封闭。

例 21 非齐次线性方程组的解集$S=\{x \mid Ax=b\}$ 不是向量空间。因为当$S=\Phi$时，S 不是向量空间；当$S \neq \Phi$时，若$\eta \in S$，则$A(2\eta)=2b \neq b$，知$2\eta \notin S$。

例 22 设 a, b 为两个已知的 n 维向量，集合$L=\left\{x=\lambda a+\mu b \mid \lambda,\mu \notin R\right\}$是一个向量空间。因为若$x_1=\lambda_1 a+\mu_1 b, x_2=\lambda_2 a+\mu_2 b$，则有

$x_1+x_2=(\lambda_1+\lambda_2)a+(\mu_1+\mu_2)b \in L,\ kx_1=(k\lambda_1)a+(k\mu_1)b \in L$。

这个向量空间称为由向量 a, b 所生成的向量空间。

一般地，由向量组$a_1,a_2,\cdots a_m$所生成的向量空间为

$L=\{x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_m a_m \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m \in R\}$

例 23 设向量组$a_1,\cdots a_m$与向量组$b_1,\cdots b_S$等价，记

$L_1=\{x=\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m \mid \lambda_1,\cdots,\lambda_m \in R\}, L_2=\{x \mid x=\mu_1 b_1+\cdots+\mu_s b_s \mid \mu_1\cdots,\mu_s \in R$

试证 $L_1=L_2$。

证设 $x \in L_1$，则 X 可由 $a_1, \cdots, a_m$ 线性表示，因 $a_{1,} \cdots, a_m$ 可由 $b_1, \cdots b_S$ 线性表示，故 x 可由 $b_1, \cdots b_S$ 线性表示，所以 $x \in L_2$。即若 $x \in L_1$，则 $x \in L_2$，因此 $L_1 \subset L_2$，类似可证：若 $X \in L_2$，则 $X \in L_1$，因此 $L_2 \subset L_1$，因为 $L_1 \subset L_2$，$L_2 \subset L_1$，所以 $L_1 = L_2$

二　子空间

定义 7　设有向量空间 V_1 及 V_2，若 $v_1 \subset v_2$ 称 V_1 是 V_2 的子空间。

例如任何由 n 维向量所组成的向量空间 V，总有 $V \subset R^n$，所以 V 总是 R^n 的子空间。

三、向量空间的基、维数与坐标

定义 8　设 V 为向量空间，如果 r 个向量 $a_1, a_2, \cdots a_r \in V$，且满足

（I）$a_1, a_2, \cdots a_r$ 线性无关；

（II）V 中任一向量都可由 $a_1, a_2, \cdots a_r$ 线性表示，

则向量组 $a_1, a_2, \cdots a_r$ 称为向量空间 V 的一个基，r 称为向量空间的 V 的维数，并称 V 为 r 维向量空间。

注：（1）只含有零向量的向量空间称为 0 维向量空间，因此它没有基。

（2）若把向量空间 V 看作向量组，那么 V 的基就是向量组的最大无关组，V 的维数就是向量组的秩。

（3）若向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 是向量空间 V 的一个基，则 V 可表示为 $V = \{x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r \mid \lambda_1, \cdots, \lambda_r \in R\}$

例如，向量空间 $V = \{x = (0, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_2, \cdots, x_n \in R\}$ 的一个基可取为：

$e_2 = (0,1,0,\cdots,0)^T, \cdots, e_n = (0,\cdots,0,1)^T$，由此可知它是 n-1 维向量空间。

又如，齐次线性方程组的解空间$S=\{x\mid Ax=0\}$，若能找到解空间的一个基$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，则解空间可表示为

$$S=\{x=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}\mid c_1,c_{2,}\cdots,c_{n-r}\in R\}$$

如果在向量空间 V 中取定一个基$a_1,a_2,\cdots,a_r$，那么 V 中任一向量 X 可唯一地表示为$x=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+x_ra_r$，数值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$称为向量 X 在基$a_1,a_2,\cdots,a_r$中的坐标。

特别地，在 n 维向量空间R^n中取单位坐标向量组$e_1,e_2,\cdots,e_n$为基，则以$x_1,x_2,\cdots,x_n$为分量的向量 X，可表示为$x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$，向量在基$e_1,e_2,\cdots,e_n$中的坐标就是该向量的分量。$e_1,e_2,\cdots,e_n$叫做$R^n$中的自然基。

例 24 设$A=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}$ $B=(b_1,b_2)=\begin{pmatrix}1&4\\0&3\\-4&2\end{pmatrix}$

验证a_1,a_2,a_3是R^3的一个基，并求b_1,b_2在这个基中的坐标。

解 要证a_1,a_2,a_3是R^3的一个基，只要证a_1,a_2,a_3线性无关，即只要证$A\sim E$，设$b_1=x_{11}a_1+x_{21}a_2+x_{31}a_3,b_2=x_{12}a_1+x_{22}a_2+x_{32}a_3$，

即$(b_1,b_2)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\end{pmatrix}$记作$B=AX$

对矩阵（A，B）施行初等行变换，若 A 能变为 E，则a_1,a_2,a_3为R^3的一个基，且当 A 变为 E 时，B 变为$X=A^{-1}B$。

$$(A,B)=\begin{pmatrix}2&2&-1&1&4\\2&-1&2&0&3\\-1&2&2&-4&2\end{pmatrix}\underset{\substack{r_2-2r\\r_3+r_1}}{\overset{\frac{1}{3}(r_1+r_2+r_3)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1&-1&3\\0&-3&0&2&-3\\0&3&3&-5&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}&1\\0&0&1&-1&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

因为A～E，故a_1,a_2,a_3是R^3的一个基，且$(b_1,b_2)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

所以b_1,b_2在基a_1,a_2,a_3中的坐标依次为$\frac{2}{3},-\frac{2}{3};-1$和$\frac{4}{3},1,\frac{2}{3}$。

例 25 在R^3中取定一个基a_1,a_2,a_3，再取一个新基b_1,b_2,b_3，设$A=(a_1,a_2,a_3)$，$B=(b_1,b_2,b_3)$，求用a_1,a_2,a_3表示b_1,b_2,b_3的表示式（基变换公式,）并求向量在两个基中的坐标之间的关系式（坐标变换公式）。

解$(a_1,a_2,a_3)=(e_1,e_2,e_3)A,\quad (e_1,e_2,e_3)=(a_1,a_2,a_3)A^{-1}$

故$(b_1,b_2,b_3)=(e_1,e_2,e_3)B=(a_1,a_2,a_3)A^{-1}B$

即基变换公式为$(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)P$

其中表示式的系数矩阵$P=A^{-1}B$称为从旧基到新基的过渡矩阵。设向量 X 在旧基和新基中的坐标分别为y_1,y_2,y_3和z_1,z_2,z_3，

即$x=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},\quad x=(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

故$A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$，得$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$即$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

这就是从旧坐标到新坐标的坐标变换公式。

四、小结

1、向量空间的概念

2、子空间的概念

3、向量空间的基，维数与坐标的求法

五、作业　P112、36、37、38、39

第四章　向量组的线性相关性习题课

一、本章知识点结构图

- 向量组的线性相关性
  - 向量组
    - 基本概念
    - 线性组合
    - 线性相关
    - 线性无关
    - 秩与最大无关组
  - 线性方程组
    - 解的性质
    - 解的结构:基础解系、特征、通解
    - $Ax=0\begin{cases} r(A)=n,\text{唯一零解} \\ r(A)<n,\text{无穷多组解} \end{cases}$
    - $Ax=b\begin{cases} r(A)=r(A,b)=n,\text{唯一解} \\ r(A)=r(A,b)<n,\text{无穷多解} \\ r(A)\neq r(A,b),\text{无解} \end{cases}$
  - 向量空间
    - 向量空间及子空间
    - 向量空间基、维数、坐标

二、学习要点

本章主要学习向量组的线性相关性理论以及齐次、非齐次线性方程组的解的结构，理论性很强，内容较抽象。本章的难点是向量组线性相关性及矩阵的秩。

重点是向量组线性相关与线性无关的概念及相关的基本结论，它是学好本章的重要基础；向量组的秩也是本章的重点内容，注意将向量组的秩和矩阵的秩联系起来；齐次，非齐次线性方程组的结构是本章又一重点，齐次线性方程组基础解系的求法，必须掌握，它是第五章中求解方阵特征向量的基础，另外学习时要与上章求解线性方程组的方法相结合，对于用矩阵初等行变换，求解线性方程组的方法，不仅要熟练掌握，而且要理解基原理，从而能灵活运用。

无论是证明、判断还是计算，关键在于深刻理解本章的基本概念，搞清楚其相互之间的关联。要学会用定义来作推导论证，注意推导过程中逻辑的正确性，在计算过程中注意知识点的转化，如将求向量组的秩转化为求矩阵的秩及方程语言、矩阵语言，几何语言三者之间的转化等。

三、典型例题

1、向量组线性关系的判定

例 26 设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\3\\c\end{pmatrix}$

求（1）C 为何值，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关；

（2）C 为何值，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关；

（3）将，α_3表示为α_1,α_2的线性组合。

解（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$）$=\begin{pmatrix}1&-3&2\\2&1&3\\3&-2&c\end{pmatrix}\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-3&2\\0&7&-1\\0&7&c-6\end{pmatrix}\overset{r_3-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-3&2\\0&7&-1\\0&0&c-5\end{pmatrix}$

（1）当$c-5\neq 0$,即$c\neq 5$时,$R\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=3$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

（2）当$c-5=0$,即$c=5$时, $R\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=2<3$,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关。

（3）当 $c=5$时，得 $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & 7 & -1\\ 0 & 0 & c-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & 7 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\underset{r_2\div 7}{\overset{r_1+\frac{3}{7}r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{11}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{7}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 所以

$\alpha_3=\frac{11}{7}\alpha_1-\frac{1}{7}\alpha_2$。

例 27 设 A 是 n×m 矩阵，B 是 m×n 矩阵，其中 n<m,若 AB=E_n,证明 B 的列向量组线性无关（E_n为 n 阶单位阵）。

证一 根据向量组线性无关的定义，通过线性方程组理论证明。记矩阵 B=(b_1、b_2……b_n)，设 $x_1b_1=x_2b_2+\cdots+x_nb_n=0$,

$$即Bx=0\Rightarrow ABx=0\Leftrightarrow Ex=0(因AB=E)$$

$$\Leftrightarrow X=0$$

由定义知，B 的列向量组线性无关。

证二 利用有关矩阵的性质。

由矩阵 $\mathrm{AB}=\mathrm{E}\Rightarrow \mathrm{R(B)}\geq \mathrm{R(E_n)}=\mathrm{n}$；另一方面，因 B 是 mxn 矩阵，故 $\mathrm{R(B)}\leq \mathrm{n}(<\mathrm{m})$综合上面两个不等式，得$\mathrm{R(B)}=n$, 于是 B 的列向量组线性无关。

2 求向量组的秩

例 28 设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\4\\-2\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\6\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

求向量组的秩及其一个最大无关组，并把其余向量用此最大无关组线性表示。

解

$$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\-1&-2&0&3\\2&4&6&0\\1&-2&-1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2+r_1\\r_3-2r_1}}{\underset{r_4-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&0&3&3\\0&0&0&0\\0&-4&-4&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\overset{r_2\leftrightarrow r_4}{\underset{r_3\leftrightarrow r_5}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&-4&-4&0\\0&0&1&1\\0&0&3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2\div(-4)}{\underset{r_4-3r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_1-2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 所 以 $\alpha\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)=3.$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是原向量组的一个最大无关组，且 $\alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$。

例 29 设$\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_m$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_m,\cdots$，$\beta_m=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{m-1}$

证明：$\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_m$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$有相同的秩。

分析 要证明这两个向量组有相同的秩，只须证明它们等价，即证明它们可以互相线性表示即可。

证明 由题设得$\beta_i=\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+0\bullet\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_m$， $i=1.2\cdots,m.$

所以$\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_m$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示。又将题设的$\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_m$的 m 个等式相加 得$\beta_1+\beta_2+\cdots,\beta_m=(m-1)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)$

从而$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=\dfrac{1}{m-1}\left(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m\right)$

又$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=\alpha_i+\left(\alpha_1+\cdots+\alpha_{i=1}+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_m\right)=\alpha_i+\beta_i$于是有

$\alpha_i=\dfrac{1}{m-1}\left(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m\right)-\beta_i,i=1,2\cdots,m.$

这表明$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$可由$\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_m$线性表示，故$\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_m$与$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$等价，从而它们的秩相同。

2、向量空间的判定

例 30 下列向量集合是否为向量空间？如果是向量空间，求出它的基及维数，$\mathrm{V}=\left\{\mathrm{x}=\left(\mathrm{x}_1 2\mathrm{x}_2,-3\mathrm{x}_1\right)^{\mathrm{T}}\middle|\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2\in\mathrm{R}\right\}$

解 V 中任意向量 x 都可以写成

$$x=\left(x_1,2x_2,-3x_1\right)^T=\left(x_1,0,-3x_1\right)^T+\left(0.2x_2,0\right)^T=x_1\left(1.0,.-3\right)^T+x_2\left(0,2,0\right)^T\left(x_1,x_2\in R\right)$$

即 X 可以写成R^3中两个固定向量$\alpha_1=(1.0,-3)^T,\alpha_2=\left(0,2,0\right)^T$的线性组合，故 V 是由$\alpha_1,\alpha_2$生成 向量空间（$R^3$的空间）。由于$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，且 V 中向量均可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示，故$\alpha_1,\alpha_2$为 V 的一个基，且 V 的维数为 2。

4、线性方程组的解法

例 31　a，b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2-2\mathrm{x}_3+3\mathrm{x}_4=0\\2\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2-6\mathrm{x}_3+4\mathrm{x}_4=-1\\3\mathrm{x}_1+2\mathrm{x}_2+\mathrm{a}\mathrm{x}_3+7\mathrm{x}_4=-1\\\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2-6\mathrm{x}_3-\mathrm{x}_4=\mathrm{b}\end{cases}$$

有解？在有解的情况下，求出其全部解。

解对增广矩阵 B 施行初等行变换：

$$B=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&a&7&-1\\1&-1&-6&-1&b\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3-3r_1\\r_4-r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&-1&a+b&-2&-1\\0&-2&-4&-4&b\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3-r_2\\r_4-2r_2\\r_2\div(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a+8&0&0\\0&0&0&0&b+2\end{pmatrix}$$

（1）当$\mathrm{b}+2\neq0$,即$\mathrm{b}\neq-2$时,方程组无解，

（2）当 b+2=0 且$a+8\neq0$，即 b=−2 且 $a\neq-8$时,$r(A)=r(B)=3<4$,方程组有无穷多解。此时，$B\overset{r_3\div(a+8)}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1+2r_3\\r_{2-2r_3}\\r_1-r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$它的同解方程

组为$\begin{cases} x_1=-x_4-1 \\ x_2=-2x_4+1 \\ x_3=0 \end{cases}$所以得通解$\mathrm{x}=\begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \\ \mathrm{x}_4 \end{pmatrix}=\mathrm{c}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(\mathrm{c}\in\mathrm{R})$

（3）当 b=-2 且$a=-8$时，R（A）=R（B）=2<4,方程组有无穷多解，此时

$B\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\overset{r_1-r_2}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$它的同解方程组为

$\begin{cases} x_1=4x_3-x_4-1 \\ x_2=-2x_3-2x_4+1 \end{cases}$所以通解为$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(c_1,c_2\in R)$

例 32　设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知$\eta_1,\eta_2,\eta_3,$是它的三个解向量，且

$$\eta_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$求该方程组的通解。

解　只要求出对应的齐次方程组的基础解系即可。设四元非齐次线性方程组为$Ax=b,$由已知条件，可知η_1就是$Ax=b,$的一个特解。

又已知条件$R(A)=3$可知，$Ax=0$的基础解系里解向量的个数为 4 – 3=1，即它的任一非零解都是它的一个基础解系。

由$\eta_1,\eta_2,\eta_3,$是$\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$的三个解向量，可得

$A(2\eta_1-\eta_2-\eta_3)=2A\eta_1-A\eta_2-A\eta_3=2b-b-b=0,$　即　$2\eta_1-\eta_2-\eta_3$　为

$Ax=0$的一个解向量，又因为$2\eta_1-\eta_2-\eta_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ \grave{}6 \end{pmatrix}\neq 0$，故它是$\mathrm{Ax}=0$的一个基础

解系，所以 $Ax=b$ 的通解为 $x=c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ （$C\in R$）

例 33　设 A，B 都是 n 阶方阵，且 AB=0，证明：$R(A)+R(B)\le n$

分析　　由 AB=0 知，B 的列向量是方程组 $Ax=0$ 的解向量，于是问题转化为对齐次线性方程组的讨论。

证　　设 $B=(b_1,b_2,\cdots b_n)$. 由 AB=0 知 $Ab_j(j=1,2\cdots n)$, 即向量组 $b_1,b_2,\cdots b_n$ 是方程组 $Ax=0$ 的解向量，从而它们可由 $Ax=0$ 的基础解系线性表示。故向量组 $b_1,b_2,\cdots b_n$ 的秩不大于 $n-R(A)$ （基础解系所含解向量的个数），也就是 $R(B)\le n-R(A)$，或 $R(A)+R(B)\le n$ 。