第五章　　相似矩阵及二次型

§1 向量的内积,长度及正交性

定义 1 设有 n 维向量 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 令 $\left[x,y\right]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$, $\left[x,y\right]$ 称为向量 x与y 的内积.

内积的矩阵表示 $\left[x,y\right]=x^Ty$

内积的性质(其中 x,y 为 n 维向量,λ为实数)

(1) $\left[x,y\right]=\left[y,x\right]$;

(2) $\left[\lambda x,y\right]=\lambda\left[x,y\right]$;

(3) $\left[x+y,z\right]=\left[x,z\right]+\left[y,z\right]$;

(4)当 $x=0,\left[x,x\right]=0$; 当 $x\neq 0$时, $\left[x,x\right]>0$

利用这些性质,还可以证明施瓦茨(schwarz)不等式 $\left[x,y\right]^2\leq\left[x,y\right]\left[y,y\right]$

二 向量的长度及性质

定义 2 令 $\|x\|=\sqrt{\left[x,x\right]}=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2}$

$\|x\|$ 称为 n 维向量 x 的长度(或范数)

向量长度的性质：

1.非负性当 $x\neq 0$ 时 $\|x\|>0$; 当 $x=0$ 时 $\|x\|=0$;

2.齐次性 $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$;

3.三角不等式 $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

单位向量及 n 维向量间的夹角

（1）当 $\|x\|=1$ 时，称 x 为单位向量

（2）当 $x\neq 0, y\neq 0$ 时， $\theta=arc\cos\dfrac{\left[x,y\right]}{\|x\|\|y\|}$ 称为 n 维向量 x 与 y 的夹角。

三、正交向量组的概念及求法

1、正交的概念

当$\left[x, y\right]=0$时，称向量x与y正交。显然，若$x=o,$则x与任何向量都正交。

2、正交向量组的概念

若一非零向量组中的向量两两正交，则称该向量组为正交向量组。

3、正交向量组的性质

定理 1 若 n 维向量 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 是一组两两正交的非零向量，则 $a_1, a_2 \cdots, a_r$ 线性无关。

证 设有$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_r$设$\lambda_1 a_2+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_r a_r=0,$

以a_1^T左乘上式两端，得，$\lambda_1 a_1^T a_1=0$因$a_1 \neq 0,$故$a_1^T a_1=\left\|a_1\right\|^2 \neq 0,$从而必有$\lambda_1=0_0$类似可证$\lambda_2=0, \cdots, \lambda_r=0_0$于是向量组$a_{1,} a_2, \cdots, a_r$线性无关。

注 线性无关的向量组未必是正交向量组。

例 1 已知 3 维向量空间R^3中两个向量$a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$正交,试求一个非零向量$a_3$，使$a_1, a_2, a_3$两两正交

解 记 A=$\begin{pmatrix}\mathrm{a}_1{}^T\\a_2{}^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}$

a_3应满足齐次线性方程组$Ax=0,$即

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

由$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，得$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=0\end{cases}$,从而有基础解系$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，

取$a_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$即合所求.

4、规范正交基

定义 3　设 n 维向量 $\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\cdots,\mathrm{e}_r$ 是向量空间 $\mathrm{v}(\mathrm{v}\subset \mathrm{R}^n)$ 的一个基，如果 $\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\cdots,\mathrm{e}_r$ 两两正交，且都是单位向量，则称 $\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\cdots,\mathrm{e}_r$ 是 V 的一个规范正交基。

例如 $e_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$　$e_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$　$e_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$　$e_4=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

由于 $\left[e_{i,}e_j\right]=0^{i\neq j\text{且}i,j=1,2,3,4,}\left[e_i,e_i\right]=1,i=1,2,3,4$

所以,e_1,e_2,e_3,e_4 是 R^4 的一个规范正交基

5、求规范正交基的方法

设 $a_1,\cdots,a_r$ 是向量空间 V 的一个基,要求 V 的一个规范正交基,就是要找一组两两正交的单位向量 $e_1,\cdots,e_r$,使 $e_1,\cdots,e_r$ 与 $a_1,\cdots,a_r$ 等价。这样一个问题,称为把 $a_1,\cdots,a_r$ 这个基规范正交化。

设　我们可用以下方法把 $a_1,\cdots,a_r$ 规范正变化：

（1）正变化

取 $b_1=a_1;b_2=a_2-\frac{\left[b_1,a_2\right]}{\left[b_1,b_1\right]}b_{1;}\cdots b_r=a_r-\frac{\left[b_1,a_r\right]}{\left[b_2,b_2\right]_1}b_1-\frac{\left[b_2,a_r\right]}{\left[b_2,b_2\right]}b_2-\cdots-\frac{\left[b_{r-1},a_r\right]}{\left[b_{r-1},b_{r-1}\right]}b_{r-1}$

容易验证 $b_1,\cdots,b_r$ 两两正交，且 $b_1,\cdots,b_r$ 与 $a_1,\cdots,a_r$ 等价。

（2）单位化

取 $e_1=\frac{1}{\|b_1\|}b_1,e_2=\frac{1}{\|b_2\|}b_2,\cdots,e_r=\frac{1}{\|b_r\|}b_r$, 则 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 为 V 的一个规范正交基。

上述由线性无关向量组 $a_1,\cdots,a_r$ 导出正交向量组 $b_1,\cdots b_r$ 的过程称为施密特正交化过程。

例 2 设 $a_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 1\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}4\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$，试用施密特正变化过程把这组向量规范正变化。

解　　取

$$b_1=a_1;b_2=a_2-\frac{[a_2,b_1]}{\|b_1\|^2}b_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix};$$

$$b_3=a_3-\frac{[a_3,b_1]}{\|b_1\|^2}b_1-\frac{[a_3,b_2]}{\|b_2\|^2}b_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

再单位化，取$e_1=\frac{b_1}{\|b_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},e_2=\frac{b_2}{\|b_2\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},e_3=\frac{b_3}{\|b_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ e_1,e_2,e_3 即为所求

例 3 已知$a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,求一组非零向量$a_2,a_3$,使$a_{1,}a_2,a_3$,两两正交。

解a_2,a_3,应满足方程$\mathrm{a_1}^{\mathrm{T}}\mathrm{x}=0$即$\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2+\mathrm{x}_3=0$

它的基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$

把基础解系正变化，即合所求。

即取$a_2=\xi_1,a_3=\xi_2-\frac{[\xi_{1,}\xi_2]}{[\xi_{1,}\xi_2]}\xi_1$其中$[\xi_1,\xi_2]=1,[\xi_{1,}\xi_1]=2,$于是得

$$a_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

四、正交矩阵与正交变换

1 定义 4　如果 n 阶矩阵 A 满足$A^TA=E(\text{即}A^{-1}=A^T)$则称 A 为正交矩阵，简称正交阵，

2 正交矩阵的性质

（1）正交矩阵 A 的行列式$|A|=1\text{或}|A|=-1.$

(2)正交矩阵 A 是可逆矩阵,且$A^{-1}=A^T$

(3)正交矩阵的逆矩阵 A^{-1} 也是正交矩阵.

(4)正交矩阵的行(列)向量组均是两两正交的单位向量。

(5)正交矩阵的乘积所得的矩阵也是正交矩阵。

例 4　设 x 为 n 维列向量，$x^T x = 1$, 令H=E−$2xx^T$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，求证：H 是对称的正交矩阵。

证明　因为 $H^T = \left(E - 2xx^T\right)^T = E^T - 2(x^T)^T x^T = E - 2xx^T = H$ 所以 H 是称矩阵，注意到 $x^T x = 1$, 有 $H^T H = (E - 2xx^T)(E - 2xx^T) = E - 4xx^T + 4x(x^T x)x^T = E$。

从而 H 是对称的正交矩阵。

3 正交变换

定义 5　若 P 为正交矩阵，则线性变换 $y = px$ 称为正交变换

性质　　正交变换保持向量的长度不变。

证　设 $y = px$ 为正交变换，则有 $\| y \| = \sqrt{y^T y} = \sqrt{x^T P^T px} = \sqrt{x^T x} = \| x \|$。

五　、小结

1.求规范正交基的方法 见正文。

2.A 为正交矩阵的充要条件是下列条件之一成立：

（1）$A^{-1} = A^T$

（2）$A^T A = E;$

（3）A 的行（列）向量是两两正交的单位向量。

六、作业 P137，1（1），2　（1）　4

§2 方阵的特征值与特征向量

工程技术中遇到的大量问题，如控制系统的稳定性问题，数字图象处理和模式识别中的维数压缩技术问题等，常可归结为求一个方阵的特征值和特征向量的问题。数学中诸如方阵的对角化及解微分方程组等问题，也都要用到特征值的理论。

一、特征值与特征向量的概念

1．**定义 6** 设 A 为 n 阶矩阵，如果数入和 n 维非零列向量 x'，使 $Ax = \lambda x$ 成立，则称入

是方阵 A 的特征值，非零向量 x' 称为 A 的对应于特征值入的特征向量。

注 特征向量 $x \neq 0$，特征值问题是对方阵而言的，

2、特征多项式与特征方程

λ 的 n 次多项式 $f(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$

称为 n 阶方阵 A 的特征多项式，$\left|A-\lambda E\right|=0$ 称为方阵 A 的特征方程，特征方程的根就是方阵 A 的特征值。在复数范围内 n 阶矩阵 A 有 n 个特征值（重根按重数计算）。

3.、设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

（1）$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots a_{nn}=t_r A$（称为矩阵 A 的迹）；

（2）$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\left|A\right|$；

（3）若 λ 是 A 的一个特征值，则 $\varphi(\lambda)$ 是矩阵多项式 $\varphi(A)$ 的特征值，其中

$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m,\qquad \varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$。

二、特征值与特征向量的求法

求矩阵特征值与特征向量的步骤：

（1）计算 A 的特征多项式 $\left|A-\lambda E\right|$；

（2）求特征方程 $\left|A-\lambda E\right|=0$ 的全部根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，就是 A 的全部特征根；

（3）对于特征值 λ_i，代入齐次方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$，求出该方程组的一个基础解系，则这个基础解系的非零线性组合就是对应于特征值 λ_i 的全部特征向量。

对于抽象的矩阵 A，讨论有关特征值与特征向量问题时，往往由定义出发，结合矩阵运算的性质进行讨论。

例 5 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量

解 A 的特征多项式为$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2,$

所以 A 的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1,$

当$\lambda_1=2$时，解方程组$(A-2E)x=0$。

由$A-2E=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得基础解系$P_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，所以$kp_1(k\neq 0)$是对应于$\lambda_1=2$的全部特征向量。

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，解方程组$(A-E)x=0$，

由$A-E=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得基础解系$P_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$，所以$kp_2(k\neq 0)$是对应于$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量。

思考 A 属于$\lambda_1=2$的特征向量与$(A-2E)x=0$的通解有什么不同?

例 6 求矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$的特征值和特征向量。

解 A 的特征多项式为$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-5)(\lambda+1)^2$

所以 A 的特征值为$\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=-1.$

当$\lambda_1=5$时，解方程组$(A-5E)x=0,$

由$A-5E=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$得基础解系$P_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。

所以$kp_1(k\neq 0)$是对应于$\lambda_1=5$的全部特征向量。

当$\lambda_2=\lambda_3=-1$时，解方程组$(A+E)x=0$

7

由 $A+E=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系 $P_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

所以对应于 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的全部特征向量为 $k_2p_2+k_3p_3$（k_2,k_3 不同时为 0）。

三、特征值与特征向量的性质

定理 2 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 A 的 m 个特征值，$p_1,p_2,\cdots,p_m$ 依次是与之对应的特征向量，如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 各不相等，则 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 线性无关。

证 设有常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使 $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_mp_m=0.$

则 $A(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_mp_m)=0$，即 $\lambda_1x_1p_1+\lambda_2x_2p_2+\cdots+\lambda_mx_mp_m=0$，

仿此类推，有 $\lambda_1^kx_1p_1+\lambda_2^kx_2p_2+\cdots+\lambda_m^kx_mp_m=0(k=1,2,\cdots,m-1).$

把上面各式合写成矩阵形式，得

$$(x_1p_1,x_2p_2,\cdots,x_mp_m)\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{m-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{m-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&\lambda_m&\cdots&\lambda_m^{m-1}\end{pmatrix}=(0,0,\cdots,0)$$

上式等号左端第二个矩阵的行列式为范德蒙行列式，当 λ_i 各不相等时该行列式不等于 0，从而该矩阵可逆，于是有 $(x_1p_1,x_2p_2,\cdots,x_mp_m)=(0,0,\cdots,0)$，

即 $x_jp_j=0(j=1,2,\cdots,m)$，但 $p_j\neq0$，故 $x_j=0(j=1,2,\cdots,m)$。

所以向量组 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 线性无关。

例 7 已知 n 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，对应的特征向量分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，证明：

（1）kA（k 为常数）的特征值为 $k\lambda_1,k\lambda_2,\cdots,k\lambda_m$，对应的特征向量为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$；

（2）A^m（m 为正整数）的特征值为 $\lambda_1^m,\lambda_2^m,\cdots,\lambda_n^m$，对应的特征向量为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$；

（3）当 A 为可逆时，A^{-1} 的特征值为 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$, 对应的特征向量为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$。

证明（1）由题设知 $Ax_i=\lambda_ix_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$, 于是

$(kA)x_i = k(Ax_i) = k(\lambda_i x_i) = (k\lambda_i)x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$。

故 kA（k 为常数）的特征值为$k\lambda_1, k\lambda_2, \cdots, k\lambda_n$，对应的特征向量为$x_1, x_2, \cdots x_n$.

（2）由 $Ax_i = \lambda_i x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ 得

$$A^2 x_i = A(Ax_i) = A(\lambda_i x_i) = \lambda_i(Ax_i) = \lambda_i(\lambda_i x_i) = \lambda_i{}^2 x_i$$
$$A^3 x_i = A(A^2 x_i) = A(\lambda_i^2 x_i) = \lambda_i^2(Ax_i) = \lambda_i^3 x_i, \cdots,$$
$$A^m x_i = A(A^{m-1} x_i) = A(\lambda_i^{m-1} x_i) = \lambda_i^{m-1}(Ax_i) = \lambda_i^m x_i$$

故 A^m（m 为正整数）的特征值为$\lambda_1^m, \lambda_2^m, \cdots, \lambda_n^m$,对应的特征向量为$x_1, x_2, \cdots, x_n$。

（3）由 A 可逆，$|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \neq 0$ 得 $\lambda_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，从而由等式 $Ax_i = \lambda_i x_i$ 可得 $A^{-1}(Ax_i) = A^{-1}(\lambda_i x_i) = \lambda_i A^{-1} x_i$，即 $A^{-1} x_i = \lambda_i^{-1} x_i$。

故 A^{-1} 的特征值为$\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$,对应的特征向量为$x_1, x_2, \cdots, x_n$。

例 8 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，-1，2，求$|A^* + 3A - 2E|$。

解 因 A 的特征值全不为 0，知 A 可逆，故 $A^* = |A| A^{-1}$，而$|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$，

所以 $A^* + 3A - 2E = -2A^{-1} + 3A - 2E$ 。

把上式记作 $\varphi(A)$，有 $\varphi(\lambda) = -\dfrac{2}{\lambda} + 3\lambda - 2,$ 故 $\varphi(A)$ 的特征值为

$\varphi(1) = -1, \vartheta(-1) = -3, \varphi(2) = 3,$ 于是 $| A^* + 2A - 2E |= (-1).(-3).3 = 9$

例 9 设λ_1和λ_2是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为 p_1和p_2,证明 $p_1 + p_2$ 不是 A 的特征向量。

证 证否定性的命题，常常用反证法。

按题设，有 $Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2,$ 故 $A(p_1 + p_2) = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2,$ 于是

$\lambda(p_1 + p_2) = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2.$ 假设 $p_1 + p_2,$ 是 A 的特征向量，别应存在数λ，使

$A(p_1 + p_2) = \lambda(p_1 + p_2),$ 于是 $\lambda(p_1 + p_2) = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2,$ 即 $(\lambda_1 - \lambda)p_1 + (\lambda_2 - \lambda)p_2 = 0$ 因

$\lambda_1 \neq \lambda_2,$ 由定理 2 知 p_1, p_2 线性无关，故上式得 $\lambda_1 - \lambda = \lambda_2 - \lambda = 0,$ 即 $\lambda_1 = \lambda_2,$ 与题设矛盾，

因此 $p_1 + p_2$不是 A 的特征向量。

四、小结

9

1．特征值与特征向量的概念

2．特征值与特征向量的求法

3．作业 P138　5（1）　,（2），　6，　9，　11

§3 相似矩阵

一、相似的概念

定义 7 设 A，B 都是 n 阶阵，若有可逆矩阵 P，使 $p^{-1}AP=B$，则称 B 是 A 的相似矩阵，或说矩阵 A 与 B 相似。对 A 进行运算 $p^{-1}AP$ 称为对 A 进行相似变换，可逆矩阵 P 称为把 A 变成 B 的相似变换矩阵。

二、相似矩阵的性质

1、若 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则 $|A|=|B|$。

证　由条件存在可逆矩阵 P，使 $p^{-1}AP=B$，将上式两边取行列式，左边 $=|P^{-1}AP|=|P^{-1}||A||P|=|P^{-1}||P||A|=|P^{-1}P||A|=|A|=|B|=$右边。

2、若 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则 A^T 与 B^T 也相似。

证　由条件存在可逆矩阵 P，使 $p^{-1}AP=B$，将上式两边取转置，

$$(P^{-1}AP)^T=P^TA^T(P^{-1})^T=P^TA^T(P^T)^{-1}=B^T$$

由 $P^TA^T(P^T)^{-1}=B^T$，有 $(P^T)^{-1}B^TP^T=A^T$，由定义 B^T 与 A^T 相似，再由对称性可得 A^T 与 B^T 也相似。

3、若 n 阶矩阵 A 与 B 相似，且 A 可逆，则 B 也可逆，且 A^{-1} 与 B^{-1} 相似。

证　因 A 可逆，所以 $|A|\neq 0$，由性质 1　$|B|=|A|\neq 0$，故 B 也可逆，对 $P^{-1}AP=B$ 两端取逆矩阵，即得 $P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$，故 A^{-1} 与 B^{-1} 相似。

4、定理 3　若 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则 A 与 B 的特征多项式相同，从而 A 与 B 的特征值亦相同。

证　由条件存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$, 故

$$\begin{aligned}|B-\lambda E|&=|P^{-1}AP-\lambda E|=|P^{-1}AP-P^{-1}(\lambda E)P|=|P^{-1}(A-\lambda E)P|=|P^{-1}||A-\lambda E||P|\\&=|P^{-1}||P||A-\lambda E|=|P^{-1}P||A-\lambda E|=|A-\lambda E|\end{aligned}$$

思考　特征多项式相同的矩阵一定相似吗？

推论　若 n 阶矩阵 A 与对角矩阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

相似 ，则$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$即是 A 的 n 个特征值。

例 10　已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$相似，求 a 和 b 的值。

解　相似矩阵有相同的行列式，故由$0=|B|=|A|=-(b-a)^2$，可得 a=b，又相似矩阵有相同的特征多项式，故由$|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$可得$\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda(1-a^2)=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda$，即得$2(1-a^2)=2,a=0$，所以$a=b=0$。

利用对角矩阵计算矩阵多项式

①若$A=PBP^{-1}$，则$A^k=(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})$

$$=PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)\cdots BP^{-1}=PB^kP^{-1}$$

即若方阵 A 与 B 相似，则对任何正整数 k，A^k与B^k相似。

②**A 的多项式**$\varphi(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\cdots a_{n-1}A=a_nE$

$$=a_0PB^nP^{-1}+a_1PB^{n-1}P^{-1}+\cdots a_{n-1}PBP^{-1}+a_nPEP^{-1}$$

$$=P(a_0B^n+a_1B^{n-1}+\cdots+a_{n-1}B+a_nE)P^{-1}$$

$$=P\zeta(B)P^{-1}$$

即若方阵 A 与 B 相似，则对任何多项式$\varphi(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，方阵$\varphi(A)$与$\varphi(B)$相似。

特别地，若有可逆矩阵 P 使$P^{-1}AP=\Lambda$为对角矩阵，则

$A^k=P\Lambda^kP^{-1},\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$.对于对角矩阵$\Lambda$，有

$$\Lambda^k=\begin{pmatrix}\lambda_1{}^k & & & \\ & \lambda_2{}^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n{}^k\end{pmatrix},\varphi(\Lambda)\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n)\end{pmatrix}$$

利用上述结论可以很方便地计算矩阵 A 的多项式$\varphi(A)$。

③设$f(\lambda)$是矩阵 A 的特征多项式，则$f(A)=0$

证 只证 A 与对角矩阵相似情形，若 A 与对角矩阵相似，则存在可逆矩阵 P，使

$P^{-1}AP=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，其中$\lambda_i$为 A 的特征值，$f(\lambda_i)=0,$由$A=P\Lambda P^{-1},$有

$$f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}=P\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}P^{-1}=POP^{-1}=0$$

三、利用相似变换将方阵对角化

对 n 阶方阵 A，若可找到可逆矩阵 P，使$P^{-1}AP=\Lambda$为对角阵，这就称为把方阵 A 对角化。

定理 4 n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似（即 A 能对角化）的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量。

证 必要性 如果 A 与对角矩阵Λ相似，则存在可逆矩阵 P 使$P^{-1}AP=\Lambda$

设$P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，由$AP=P\Lambda$ 有

$$A(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

可得 $Ax_i=\lambda_i x_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$

因为 P 可逆，有$|p|\neq 0$，所以$x_i(i=1,2,\cdots,n)$都是非零向量，因而$x_1,x_2,\cdots,x_n$都是 A 的特征向量，并且这 n 个特征向量线性无关。

充分性 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为 A 的 n 个线性无关特征向量，它们所对应的特征值依次为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则有$Ax_i=\lambda_i x_i(i=1,2,\cdots,n)$令$P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，因为$x_1,x_2,\cdots,x_n$线性无关，所以 P 可逆

$$AP = A(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (AX_1, AX_2, \cdots, AX_n) = (\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \cdots, \lambda_n X_n)$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = P\Lambda$$

用p^{-1}左乘上式两端得$P^{-1}AP = \Lambda$即矩阵 A 与对角矩阵 A 相似。

推论 如果 n 阶矩阵 A 的 n 个特征值不相等，则 A 与对角矩阵相似。

注 A 有 n 个相异特征值只是 A 可化为对角矩阵的充分条件而不是必要条件。如果 A 的特征方程有重根，此时不一定有 n 个线性无关的特征向量，从而 A 不一定能对角化，但如果能找到 n 个线性无关的特征向量，A 还是能对角化，例如在例 5 中 A 的特征方程有重根，找不到 3 个线性无关的特征向量，因此例 5 中的 A 不能对角化；而在例 6 中 A 的特征方程也有重根，但能找到 3 个线性无关的特征向量，因此例 2 中的 A 能对角化。

例 11 设$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 问 x 为何值时，矩阵 A 能对角化？

解 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & x \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$，

得$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$。

对应单根$\lambda_1 = -1$，可求得线性无关的特征向量恰有 1 个，故矩阵 A 可对角化的充分必要条件是对应重根$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$，有 2 个线性无关的特征向量，即方程$(A-E)x = 0$有 2 个线性无关的解，亦即系数矩阵 A-E 的秩$R(A-E) = 1$。

由$A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

要 $R(A-E) = 1$，得$x+1 = 0$，即$x = -1$，因此，当$x = -1$时，矩阵 A 能对角化。

四、小结

1、相似矩阵的性质见正交

2、相似变换与相似变换矩阵

相似变换是对方阵进行的一种运算，它把 A 变成 $P^{-1}AP$，而可逆矩阵 P 称为进行这一变换的相似变换矩阵。这种变换的重要意义在于简化对矩阵的各种运算，其方法是先通过相似变换，将矩阵变成与之等价的对角矩阵，再对对角矩阵进行运算，从而将比较复杂的矩阵运算转化为比较简单的对角矩阵的运算。

五、作业　P138，13，14，15，18

§4 对称矩阵的对角化

上节介绍了方阵 A 满足一定的条件才存在可逆阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵，有一类特殊方阵——实对称阵，一定存在正交阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵，正交阵一定可逆，可逆阵不一定是正交阵。显然，当条件由方阵加强到实对称阵，结论也从两方面加强，一是实对称阵一定可对角化；二是相似变换阵由可逆阵加强到正交阵，其原因是实对称阵的特征值和特征向量有其特殊的性质。

本节所提到的对称矩阵，除特别说明外，均指实对称矩阵，

一、对称矩阵的性质

定理 5　对称矩阵的特征值为实数

证　设复数 λ 为对称矩阵 A 的特征值，复向量 x 为对应的特征向量，即 $Ax=\lambda x, x\neq 0$。

同 $\bar{\lambda}$ 表示 λ 的共轭复数，$\bar{x}$ 表示 x 的共轭复向量，A 为实矩阵，有 $A=\bar{A}$ 则 $A\bar{x}=\bar{A}\bar{x}=\overline{Ax}=\overline{\lambda x}=\bar{\lambda}\bar{x}$，于是有

$\bar{x}^T Ax=\bar{x}^T(Ax)=\bar{x}^T\lambda x=\lambda\bar{x}^T x$

及 $\bar{x}^T Ax=(\bar{x}^T A^T)x=(A\bar{x})^T x=(\bar{\lambda}\bar{x})^T x=\bar{\lambda}\bar{x}^T x$。

将上面两式相减，得 $(\lambda-\bar{\lambda})\bar{x}^T x=0$

但因 $x\neq 0$，所以 $\bar{x}^T x=\sum_{i=1}^{n}\bar{X}_i X_i=\sum_{i=1}^{n}|X_i|^2\neq 0$。

故 $\lambda-\bar{\lambda}=0$, 即 $\lambda=\bar{\lambda}$，这说明 λ 是实数

注　当特征值 λ_i 为实数时，齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$ 是实系数方程组，由 $(A-\lambda_i E)x=0$ 知必有实的基础解系，所以对应的特征向量可以取实向量，即对称矩阵的特

征向量为实向量。

定理 6　设λ_1,λ_2是对称矩阵 A 的两个特征值，p_1,p_2是对应的特征向量，若$\lambda_1 \neq \lambda_2$，则p_1与p_2正交。

证$\lambda_1 P_1 = AP_1, \lambda_2 P_2 = AP_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$

因 A 对称，故$\lambda_1 P_1^T = (\lambda_1 P_1)^T = (AP_1) = P_1^T A^T = P_1^T A$，于是

$\lambda_1 P_1^T P_2 = P_1^T AP_2 = P_1^T(\lambda_2 P_2) = \lambda_2 P_1^T P_2$，即$(\lambda_1 - \lambda_2)P_1^T P_2 = 0$，但$\lambda_1 \neq \lambda_2$，故$P_1^T P_2 = 0$，即$P_1$与$P_2$正交。

定理 7　设 A 为 n 阶对称阵，则必有正交阵 P，使$P^{-1}AP = P^T AP = \Lambda$，其中$\Lambda$是以 A 的 n 个特征值为对角元的对角阵。

证明　略

推论　设 A 为 n 阶对称阵 ，λ是 A 的特征方程的 K 重根，则矩阵$A-\lambda E$的秩$R(A-\lambda E) = n-k$，从而对应特征值λ恰有 K 个线性无关的特征向量。

证　按定理 7 知对称阵 A 与对角阵$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$相似，从而$A-\lambda E$与$\Lambda - \lambda E = \mathrm{diag}(\lambda_1 - \lambda,\cdots,\lambda_n - \lambda)$相似，当$\lambda$是 A 的 k 重特征根时，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$这 n 个特征值中有 k 个等于$\lambda$，有$n-k$个不等于$\lambda$，从而对角阵$\Lambda-\lambda E$的对角元恰有 k 个等于 0，于是$R(\Lambda - \lambda E) = n-k$，而$R(A-\lambda E) = R(\Lambda - \lambda E)$，所以$R(A-\lambda E) = n-k$。

二　利用正交矩阵将对称矩阵对角化举例

例 12　设$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，求一个正交矩阵 P，使$P^{-1}AP = \Lambda$为对角阵。

解　由$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，求得 A 的特征值为$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$。

对应$\lambda_1 = -2$，解方程$(A = 2E)x = 0$，由

15

$$A+2E=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$，得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，将$\xi_1$单位化，得

$P_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$。

对应$\lambda_2=\lambda_3=1$，解方程$(A-E)x=0$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$，得基础解系$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$。

将ξ_2,ξ_3正交化；取$\eta_2=\xi_2$，

$$\eta_3=\xi_3-\frac{[\eta_3,\xi_3]}{\|\eta_2\|^2}\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

再将η_2,η_3单位化，得$P_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},P_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，

将P_1,P_2,P_3构成正交矩阵，$P=(P_1,P_2,P_3)$，

有 $$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

例 13 设$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$，求$A^n$。

解 因 A 对称，故 A 可对角化，即有可逆矩阵 P 及对角阵Λ，使$P^{-1}AP=\Lambda$，于是$A=P\Lambda P^{-1}$，从而$A^n=P\Lambda^nP^{-1}$。

由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1\\-1&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)$，

得 A 的特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=3$，于是$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix},\Lambda^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}$

16

对应$\lambda_1=1$，由$A-E=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$,得$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$；

对应$\lambda_2=3$，由$A-3E=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$,得$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

并有$P=(\xi_1,\xi_2)=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$，再求出$P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$，于是

$$A^n=P\Lambda^nP^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n&1-3^n\\1-3^n&1+3^n\end{pmatrix}$$

三、 小结

1、对称矩阵的性质；

（1）特征值为实数；

（2）属于不同特征值的特征向量正交；

（3）特征值的重数和与之对应的线性无关的特征向量的个数相等；

（4）必存在正交矩阵，将其化为对角矩阵，且对角矩阵对角元素即为特征值。

2、将对称矩阵化为对角阵的步骤

（1）求出 A 的全部互不相等的特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，它们的重数依次为

$k_1,\cdots,k_s(k_1+\cdots+k_s=n)$；

（2）对每个k_i重特征值λ_i，求方程$(A-\lambda_iE)x=0$的基础解系，得k_i个线性无关的特征向量。再把它们正交化，单位化，得k_i个两两正交的单位特征向量，因为$k_1+\cdots+k_s=n$，故总共可得 n 个两两正交的单位特征向量。

（3）把这 n 个两两正交的单位特征向量构成正交矩阵 P，便有$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$，其中Λ中对角元的排列次序应与 P 中列向量的排列次序相对应。

四、作业 P139 、16（1）、17、20、24（1）

§5 二次型及其标准形

在平面解析几何中，我们已经知道，任一有心二次曲线的方程，经过坐标的平移变换后，可化成形如$ax^2+2bxy+cy^2=d$的方程。若要将它化成二次曲线的标准形式：$mx'^2+ny'^2=1$，还需要通过坐标的旋转变换消去 x，y 的乘积二次项。

17

这实际上就是将所谓二次型化为标准形的问题。一般来说，设 n 个变量的函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足 $f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^k f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 K 次齐次函数，例如

$$f(x,y,Z)=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz$$

就是关于 x,y,Z 的二次齐次函数，或称它为二次齐次多项式。下面只讨论系数为实数的含 n 个变量的二次齐次多项式——实二次型问题。

一、二次型及其标准形的概念

定义 8 含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1{}^2+a_{22}x_2{}^2+\cdots+a_{nn}x_n{}^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型，$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为实数，则 f 为实二次型，若 a_{ij} 为复数，称 f 为复二次型。

只含有平方项的二次型 $f=k_1y_1{}^2+k_2y_2{}^2+\cdots k_ny_n{}^2$ 称为二次型的标准形（或法式）。

如果标准形的系数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 只在 $1,-1,0$ 三个数中取值，

$f=y_1{}^2+\cdots y_p{}^2-y_{p+1}{}^2-\cdots-y_r{}^2$，称为二次型的规范形。

二、 二次型的表示方法

1、和号表示

对二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1{}^2+\cdots+a_{nn}x_n{}^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$，取

$a_{ji}=a_{ij}$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ij}x_jx_i$，于是 $f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$。

2、矩阵表示

用和号表示二次型虽然简单，但不便于研究，为了利用矩阵运算讨论二次型，需要将二次型用矩阵表示。

$$f=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$

则二次型可记作 $f=x^TAx$，其中 A 为对称矩阵。

在二次型的矩阵表示中，矩阵 A 是由 f 的系数所确定的，由于 f 的系数满足 $a_{ij}=a_{ji}\quad i,j=1,2,\cdots,n$，所以二次型的矩阵 A 是对称矩阵。任给一个二次型，就唯一地确定一个对称矩阵，反之，任一对称矩阵 A 对应唯一的二次型 f，因此

$$\text{二次型}f \overset{\text{一一对应}}{\longleftrightarrow} \text{对称矩阵}A$$

称 f 为对称矩阵 A 的二次型，称 A 为二次型 f 的矩阵，称 A 的秩为二次型 f 的秩。

例 14 将二次型 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ 用矩阵表示

解 因为 $a_{11}=a, a_{22}=c, a_{12}=a_{21}=b$，

所以 $f(x,y)=(x\quad y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

注 二次型 f 的矩阵 A 一定是对称矩阵。也只有 A 为对称矩阵，二次型的矩阵表示 $f=x^TAx$ 才是唯一的。如

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=(xy)\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\cdots$$

都不是二次型的矩阵表示。

例 15 写出矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 所对应的二次型

解 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^{\ 2}+2x_2^{\ 2}+4x_3^{\ 2}-x_4^{\ 2}-2x_1x_2-2x_1x_3$

三、化二次型为标准形

对于二次型，我们讨论的主要问题是：寻求可逆的线性变换，将二次型化为标准形。

设 $\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+\cdots+c_{1n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=c_{n1}y_1+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases}$，记 $c=(c_{ij})$

则上述可逆线性变换可记作 $x=cy$，将其代入 $f=x^TAx$，有

$f=x^TAx=(cy)^TA(cy)=y^T(c^TAc)y$

定义 9 设 A 和 B 是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 C，使 $B=c^TAc$，则称矩阵 A 与 B 合同。

命题 若 A 为对称阵，则 $B=c^TAc$ 也为对称阵，且 $R(B)=R(A)$。

证 A 为对称矩阵，即有 $A^T=A$，于是

$B^T=(c^TAc)=c^TA^Tc=c^TAc=B$，即 B 为对称矩阵。

又因为 $B=c^TAc$，而 c 可逆，从而 c^T 也可逆，由矩阵秩的性质知 $R(B)=R(A)$。

注 1 二次型经可逆变换 $x=cy$ 后，其秩不变，但 f 的矩阵由 A 变为 $B=c^TAc$。

2 要使二次型 f 经可逆变换 $x=cy$ 变成标准形，就是要使

$$y^Tc^TAcy=k_1y_1^2+\cdots k_ny_n^2=(y_1,\cdots y_n)\begin{pmatrix}k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$$

也就是要使 c^TAc 成为对角矩阵。

由于任给实对称矩阵 A，总有正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$，即 $P^TAP=\Lambda$，把此结论应用于二次型，即有

定理 8 任给二次型 $f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j(a_{ij}=a_{ji})$，总有正交变换 $x=py$，使 f 化为标准形

$f=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值。

推论 任给 n 元二次型 $f(x)=x^TAx(A^T=A)$，总有可逆变换 $x=cz$，使 $f(cz)$ 为规范形。

记 按定理 8 有 $f(py)=y^T\Lambda y=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，设二次型 f 的秩为 r，则特征值 λ_i 中恰有 r 个不为 0，不妨设 $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ 不等于 0，$\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$

令 $k=\begin{pmatrix}k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n\end{pmatrix}$ 其中 $k_i=\begin{cases}\dfrac{1}{|\lambda_i|}, & i\le r\\ 1 & i>r\end{cases}$

则 K 可逆，变换 $y=kz$ 把 $f(py)$ 化为 $f(pkz)=z^Tk^Tp^TApkz=z^Tk^T\Lambda kz$，而

$$k^T\Lambda k=\mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|},\cdots,\frac{\lambda_r}{|\lambda_r|},0,\cdots,0\right)$$

记 $c=pk$，即知可逆变换 $x=cz$ 把 f 化成规范形

$$f(cz)=\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}z_1{}^2+\cdots+\frac{\lambda_r}{|\lambda_r|}zr^2\text{。}$$

利用正交变换化二次型为标准形，具有既保持二次型的类型不变，又保持几何形状不变的优点，下面举例介绍利用正交变换化二次型为标准形的方法。

例 16　求一个正交变换 $x=py$，把二次型

$f=x_1{}^2-2x_2{}^2-2x_3{}^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$ 化为标准形

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$

由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&2\\-2&-2-\lambda&4\\2&4&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda+7)$

求得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-7$

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解方程 $(A-2E)x=0$，由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

将其正交化　$\eta_1=\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\xi_2-\frac{[\eta_1,\xi_2]}{[\eta_1\eta_1]}\eta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}$

21

再单位化 $p_1=\frac{\eta_1}{\|\eta_1\|}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, p_2=\frac{\eta_2}{\|\eta_2\|}=\frac{\sqrt5}{3}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3\sqrt5}\\\frac{4}{3\sqrt5}\\\frac{5}{3\sqrt5}\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=-7$ 时，解方程 $(A+7E)x=0$

由 $A+7E=\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$，再单位化 $p_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

令 $p=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt5}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

则 P 必为正交矩阵，于是正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

且有 $f=2{y_1}^2+2{y_2}^2-7{y_3}^2$

四、小结

1、用正交变换化二次型为标准形的步骤；

（1）写出二次型 f 的矩阵；

（2）求出 A 的所有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

（3）求出对应于特征值的特征向量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$；

（4）将特征向量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$先正交化后单位化，得$p_1,p_2,\cdots,p_n$，记

$p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$；

（5）作正交变换$x=py$，则得二次型 f 的标准形

$f=\lambda_1 {y_1}^2+\lambda_2 {y_2}^2+\cdots+\lambda_n {y_n}^2$。

2、二次型化为标准形，除了正交变换外，还有多种方法（对应有多个可逆的线性变换）。下一节将介绍另一种方法——拉格朗日配方法。

五、作业　P140、25（3）、26（2）、27（2）、28

§6　用配方法化二次型成标准形

用拉格朗月配方法化二次型为标准形的要点是利用和的平方公式和两数平方差公式逐步消去非平方项并构造新平方项。

拉格朗日配方法在化实二次型为标准形的过程中会遇到两种情况：

（1）如果二次型中至少有一个平方项，不妨设$a_{11}\neq 0$，则对所有含x_1的项配方（经配方后其余各项不再含x_1），再对剩下的 n-1 个变量同样进行，直到每一项都化为平方项，引入新变量即得标准形。

（2）如果二次型中不含平方项，只有混合项，不妨设$a_{12}\neq 0$，则可作可逆变换：

$$\begin{cases} x_1=y_1-y_2 \\ x_2=y_1+y_2 \\ x_k=y_k \qquad (k=3,\cdots,n) \end{cases}$$

使二次型中出现$a_{12}y_1^2-a_{12}y_2^2$，再按情形（1）的方法配方。

例 17　用配方法化二次型$f={x_1}^2+3{x_2}^2+6{x_3}^2-4x_1x_2-4x_1x_3+10x_2x_3$

成标准形,并求所用的变换矩阵。

解　　由于 f 中含变量x_1的平方项，所以先把含x_1的各项集中，配方可得

$$\begin{aligned} f&=(x_1^2-4x_1x_2-4x_1x_3)+3x_2^2+6x_3^2+10x_2x_3 \\ &=[x_1^2-4(x_2+x_3)x_1+4(x_2+x_3)^2]-4(x_2+x_3)^2+3x_2+6x_3^2+10x_2x_3 \\ &=(x_1-2x_2-2x_3)^2-x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2 \end{aligned}$$

继续对 x_2 进行配方得

$$f=(x_1-2x_2-2x_3)^2-(x_2^2-2x_2x_3+x_3^2)+3x_3^2$$
$$=(x_1-2x_2-2x_3)^2-(x_2-x_3)^2+3x_3^2$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1-2x_2-2x_3 \\ y_2=x_2-x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1=y_1+2y_2+4y_3 \\ x_2=y_2+y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

则二次型 f 的标准形为 $f=y_1^2-y_2^2+3y_3^2$

所用的变换矩阵为 $c=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(|c|=1\neq 0)$

例 18 用配方法化二次型 $f=2x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3$ 成标准形，并写出所作的可逆线性变换。

解 由于二次型 f 中不含平方项，但含有 $2x_1x_2$，所以先作下面的可逆线性变换：

$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

代入可得 $f=2y_1^2-2y_2^2-2y_1y_3=2(y_1-\frac{1}{2}y_3)^2-2y_2^2-\frac{1}{2}y_3^2$

令 $\begin{cases} z_1=y_1-\frac{1}{2}y_3 \\ z_2=y_2 \\ z_3=y_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1=z_1+\frac{1}{2}z_3 \\ y_2=z_2 \\ y_3=z_3 \end{cases}$ 或 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

则二次型 f 的标准形为 $f=2z_1^2-2z_2^2-\frac{1}{2}z_3^2$

所作的可逆线性变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

24

$$\left(\begin{vmatrix}1 & 1 & \dfrac{1}{2}\\ 1 & -1 & \dfrac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = -2 \neq 0\right)$$

小结　将一个二次型化为标准形，可以用正交变换法，也可以用配方法，或者其它方法，这取决于问题的要求。如果要求找出一个正交矩阵，则应使用正交变换法；如果只需要找出一个可逆的线性变换，那么各种方法都可以使用。正交变换法的好处是有固定的步骤，可以按部就班一步一步地求解，但计算量通常较大；如果二次型中变量个数较少，使用配方法比较简单。注意使用不同的方法，所得到的标准形可能不相同，但标准形中含有的项数必定相同，项数等于所给二次型的秩。

作业 P140　30（1）　31

§7　正定二次型

在实二次型中，正定二次型占有特殊的位置，它在数学物理等问题中应用极广。

一、惯性定理

定理9(惯性定理)设有二次型 $f = x^T Ax$，它的秩为r，有两个可逆变换 $x = cy$ 及 $x = PZ$

使 $f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ry_r^2 \qquad (k_i \neq 0)$，

及 $f = \lambda_1z_1^2 + \lambda_2z_2^2 + \cdots + \lambda_rz_r^2 \qquad (\lambda_i \neq 0)$，

则 $k_1,\cdots k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 中正数的个数相等。

证明　略

注 惯性定理告诉我们，二次型的标准形中非零平方项的个数由秩 r 唯一确定，且正项个数（称为 f 的正惯性指数）与负项个数（称为 f 的负惯性指数）也唯一确定，与所作的可逆线性变换无关。惯性定理反映了实二次型的本质特征。

二　正（负）定二次型及其判定

定义 10　设有二次型 $f(x) = x^T Ax$，如果对任何 $x \neq 0$，都有 $f(x) > 0$，则称 f 为正定二次型，并称对称矩阵 A 是正定的，记作 $A > 0$；如果对任何 $x \neq 0$ 都有 $f(x) < 0$，则称 f 为负定二次型，并称对称矩阵 A 是负定的，记作 $A < 0$。

定理 10　二次型 $f = x^T Ax$ 为正定的充分必要条件是：它的标准形的 n 个系数全为正，

25

即它的正惯性指数等于 n。

证　设可逆变换 $x=cy$ 使 $f(x)=f(cy)=\sum_{i=1}^{n}k_i y_i^2$

（充分性）设 $k_i>0(i=1,\cdots,n)$, 任给 $x\neq 0$, 则 $y=c^{-1}x\neq 0$，故

$f(x)=\sum_{i=1}^{n}k_i y_i^2>0$。

（必要性）用反证法。当设有 $k_s\le 0$, 则当 $y=e_s$（单位坐标向量）时，$f(ce_s)=k_s\le 0$，显然 $ce_s\neq 0$，这与 f 正定相矛盾，所以 $k_i>0(i=1,\cdots n)$。

推论　对称矩阵 A 为正定的充分必要条件是：A 的特征值全为正。

定理 11　对称矩阵 A 为正定的充分必要条件是：A 的各阶主子式都为正，即

$$a_{11}>0,\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\cdots,\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}>0;$$

对称矩阵 A 为负定的充分必要条件是：奇数阶主子式为负，而偶数阶主子式为正，即

$$(-1)^r\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{r1} & \cdots & a_{rr}\end{vmatrix}>0\quad (r=1,2,\cdots n)。$$

这个定理称为霍尔维茨定理，因证明比较繁，此处不证。

例 19　判别二次型 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 的正定性。

解法一　利用“二次型 $f=x^TAx$ 为正定的充要条件是对称矩阵 A 的特征值全大于 0”的结论。

二次型 f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$

解　特征方程 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$，所以 f 为正定二次型。

26

解法二 利用"二次型 $f=x^TAx$ 为正定的充要条件是对称矩阵 A 的各阶顺序主子式全大于 0" 的结论。

因为 $|a_n|=2>0,\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=6>0,|A|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix}=10>0$，

所以 f 为正定二次型。

例 20 设 $A=(a_{ij})_{nxn}$ 是正定矩阵，试证明：

（1）$a_{ii}>0(i=1,\cdots,n)$；

（2）A^{-1} 为正定矩阵；

（3）A^m（m 为正整数）为正定矩阵。

证 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值，因 A 为正定矩阵，所以 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $|A|>0$

（1）对任何 $x\neq 0$ 有 $x^TAx>0$，取 $x=e_i$，其中 e_i 是第 i 个分量为 1 其余分量为 0 的 n 维列向量，则 $a_{ii}=e_i^TAe_i>0(i=1,2,\cdots,n)$。

（2）A^{-1} 是实对称矩阵，且其特征值为 $\frac{1}{\lambda_i}>0(i=1,2,\cdots,n)$, 所 A^{-1} 是正定矩阵。

（3）A^m 为实对称矩阵，且其特征值 $\lambda_i^m>0(i=1,2,\cdots,n)$，所以 A^m 为正定矩阵。

正定二次型有着明显的几何意义，当 $f(x,y)$ 为二维的正定二次型时，它可由可逆线性变换 P 化为系数全为正的标准形，于是 $f(x,y)=c(c>0)$ 的图形是以原点为中心的椭圆。当把 C 看作任意常数时则是一族椭圆，这族椭圆随着 C 减小且趋于零而收缩到原点，当 f 为三维正定二次型 $f(x,y,z)=c(c>0)$ 的图形是一族椭球。

三 、小结

正定二次型（正定矩阵）的判别方法：

1．根据二次型 f 正定的定义证明；即证明 $f(x)=x^TAx>0(x\neq 0)$。

2．计算二次型矩阵 A 的特征值，若全为正，则 f 正定；若全为负，则 f 负定。

27

3．化二次型 f 为标准形，若标准形中系数全为正，则 f 正定；若标准形中系数全为负，则 f 负定。

4．计算二次型矩阵 A 的各阶顺序主子式，若全为正，，则 f 正定；若奇数阶为负，偶数阶为正，则 f 负定。

四、作业 P140　32（1），　33

第五章　相似矩阵及二次型　　习题课

一、本章知识点结构图

- 矩阵的特征值
  - 向量的内积
    - 向量内积的定义及性质
    - 施密特正交化
    - 正交矩阵
  - 特征值与特征向量
    - 定义
    - 性质
    - 求法
  - 矩阵对角化
    - 相似矩阵及性质
    - 对角化的条件及方法
  - 实对称矩阵对角化
    - 实对称矩阵的性质
    - 用正交矩阵将对称矩阵对角化
- 二次型
  - 二次型的矩阵表示
    - 二次型的定义
    - 二次型与对称矩阵
    - 合同矩阵的定义
  - 二次型化标准形
    - 正交变换法
    - 配方法
  - 二次型的分类
    - 类型:正定,负定
    - 正定矩阵的性质
    - 二次型正定及负定的判别方法

二、学习要点

本章的概念、定理及涉及的方法比较多，施密特正交化过程；求方阵的特征值和特征向量；矩阵的相似矩阵及对角化；化二次型为标准形；二次型的正定性判定等是本章的重点。本章的中心议题是对称矩阵的对角化问题，在学习时要掌握上面这些内容与中心议题的联系。作为可对角化矩阵的应用是用正交变换化实二次型为标准形，它与实对称矩阵正交相似

28

于对角矩阵是以两种形式出现的同一个问题。正定二次型是有广泛应用的一种特殊的二次型，要掌握其判定方法。

三、典型例题

1．将线性无关向量组化为正交单位向量

例 21 设 $a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$a_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化。

解 取 $b_1=a_1$;

$$b_2=a_2-\frac{[a_2,b_1]}{\|b_1\|^2}b_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix};$$

$$b_3=a_3-\frac{[a_3,b_1]}{\|b_1\|^2}b_1-\frac{[a_3,b_2]}{\|b_2\|^2}b_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{15}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}$$

再单位化

$$e_1=\frac{b_1}{\|b_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},e_2=\frac{b_2}{\|b_2\|}=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix},e_3=\frac{b_3}{\|b_3\|}=\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}$$

2、特征值与特征向量的求法

例 22 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&8&6\\-4&10&6\\4&-8&-4\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 A 的特征多项式为

29

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -2-\lambda & 8 & 6 \\ -4 & 10-\lambda & 6 \\ 4 & -8 & -4-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)^2$$

所以 A 的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$

当$\lambda_1=0$时，解方程$(A-OE)x=0,$由

$$A-OE=\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系$P_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

所以$kp_1(k\neq 0)$是对应于$\lambda_1=0$的全部特征向量 。

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，解方程$(A-2E)x=0$，由

$$A-2E=\begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ -4 & 8 & 6 \\ 4 & -8 & -6 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系$P_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

所以$k_1p_2+k_2P_3$是对应于$\lambda_2=\lambda_3=2$的全部特征向量（k_1, k_2不全为零）。

例 23 已知向量$x=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$是矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & m & 3 \\ -1 & n & -2 \end{pmatrix}$的一个特征向量，求参数 m，n 和特征向量 x 对应的特征值。

解 设λ_0为特征向量 x 对应的特征值，则$Ax=\lambda_0 x$，即

$$Ax=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & m & 3 \\ -1 & n & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\lambda_0 x=\lambda_0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

30

于是$\begin{cases}\lambda_0=-1\\2+m=\lambda_0\\n+1=-\lambda_0\end{cases}$,可得$\begin{cases}\lambda_0=-1\\m=-3\\n=0\end{cases}$

3、关于特征值和特征向量的其它问题

例 24 设方阵 A 满足 $A^2=A$，试证 A 的特征值为 0 或 1。

证 设$Ax=\lambda x, x\neq 0$是对应于特征值λ的特征向量。则$\lambda x=Ax=A^2x=\lambda^2x$，从而有$(\lambda^2-\lambda)x=0$，但$x\neq 0$，于是$\lambda(\lambda-1)=0$，故$\lambda=1$或$\lambda=0$。

例 25 设 A 为 n 阶方阵，且$A^TA=E, |A|<0$证明-1 是 A 的一个特征值。

证 这里 A 是正交矩阵。为证-1 是 A 的特征值，只要证明|A+E|=0 即可。

由 $A^TA=E$ 得$|A^T||A|=|E|=1$，即$|A|^2=1$。根据|A|<0 知|A| = -1。又因为

$|A+E| = |A+A^TA| = |(E+A^T)A| = |E+A^T||A| = -|(A+E)^T| = -|A+E|$

所以|A+E| = 0，故-1 是 A 的一个特征值。

例 26 设 3 阶方阵 A 的特征值为 1，-1，2，$B = A^3-5A^2$

（1）求 B 的特征值及其相似矩阵；

（2）求|B|及|A-5E|。

解（1）因为 A 的特征值为 1，-1，2，所以存在可逆矩阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}, A=P\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$A^2=P\begin{pmatrix}1^2&&\\&(-1)^2&\\&&2^2\end{pmatrix}P^{-1}, A^3=P\begin{pmatrix}1^3&&\\&(-1)^3&\\&&2^3\end{pmatrix}P^{-1}$$

于是$B=A^3-5A^2=P\begin{pmatrix}1^3&&\\&(-1)^3&\\&&2^3\end{pmatrix}P^{-1}-5P\begin{pmatrix}1^2&&\\&(-1)^2&\\&&2^2\end{pmatrix}P^{-1}$

上式左乘 P^{-1}，右乘 P，得

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}1^3&&\\&(-1)^3&\\&&2^3\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1^2&&\\&(-1)^2&\\&&2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&&\\&-6&\\&&-12\end{pmatrix}$$

故 B 的特征值为-4，-6，-12，其相似矩阵为

$$\begin{pmatrix} -4 & & \\ & -6 & \\ & & -12 \end{pmatrix}$$

（2）根据特征值特征向量性质，|B| = （-4）•（-6）•（-12）= -288

又因 $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$, 令 $\lambda = 5$ 得 $|5E - A| = 72$

所以 $|A - 5E| = (-1)^3|5E-A| = -72$

4、利用正交变换将实对称矩阵化为对角矩阵

例 27 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，求一个正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角矩阵。

解（1）求出 A 的特征值

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = -(\lambda - 4)^2(\lambda + 1)$$

从而求得特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1$

（2）求出 A 的三个正交单位特征向量

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ 时，由 $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，求得基础解系 $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

由于 x_1，x_2 恰好正交，单位化即得两个正交单位特征向量 $P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

当 $\lambda_3 = -1$ 时，由 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 求得基础解集 $x_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，单位向量取 $P_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$。

（3）求出正交矩阵 P，使 A 对角化。

取正交矩阵 $P=(P_1,P_2,P_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & 0 & \frac{-2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & 0 & \frac{1}{\sqrt5}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，则必有 $P^{-1}AP=P^TAP=\begin{pmatrix}4 & & \\ & 4 & \\ & & -1\end{pmatrix}$

注 对于特征值有重根的情形，如果相应于为 r 重根的特征值，所求得的基础解系的 r 个向量不正交，则只要将此基础解系正交规范化，即可得到 r 个两两正交的单位特征向量。

如例 27 中对应于 $\lambda=4$，可求得另一个基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ 取 $\eta_1=\xi_2$，

$\eta_2=\xi_2-\frac{[\xi_2,\eta_1]}{[\eta_1,\eta_1]}\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}-\frac{-4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\ \frac{5}{3}\end{pmatrix}$，再单位化得

$$P_1=\frac{1}{\|\eta_1\|}\eta_1=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},P_2=\frac{1}{\|\eta_2\|}\eta_2=-\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$$

于是 $P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt6} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{5}{\sqrt{30}} & 0\end{pmatrix}$

可知仍有 $P^{-1}AP=P^TAP=\begin{pmatrix}4 & & \\ & 4 & \\ & & -1\end{pmatrix}$

从例 27 中可以知道，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵的正交矩阵 P 不唯一，且 P 列向量的次序不同时，得到的对角矩阵也可以不同，

5、化二次型为标准形

例 28 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2。

（1）求参数 C；

（2）求一个正交变换 $x = py$，把二次型 f 化为标准形。

解（1）二次型 f 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix} \overset{\substack{r_1+5r_2 \\ r_3+3r_2}}{\underset{r_{2(-1)}}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 24 & -12 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 12 & c-9 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_1 x\frac{1}{12} \\ r_3-6r_1}}{\underset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & c-3 \end{pmatrix}$$

因 $R(A) = 2$，所以 C=3

（2）由 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$

求得 A 的特征位为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9$

可求得对应的特征向量为 $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

单位化 $P_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

于是正交变换为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

且有 $f = 4{y_2}^2 + 9{y_3}^2$

例 29 用配方法化二次型 $f = 2{x_1}^2 + 3{x_2}^2 - 3{x_2}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ 成标准形，并求所用的变换矩阵。

解 把含 X_1 的各项集中，配方可得

$$f=(2x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3)+3x_2^2-3x_3^2+2x_2x_3=2(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2-2x_2x_3-5x_3^2$$

继续对 x_2 进行配方得

$$f=2(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2^2-2x_2x_3-x_3^2)-6x_3^2=2(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2-x_3)^2-6x_3^2$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3 \\ y_2=\quad x_2-x_3 \\ y_3=\qquad x_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2-2y_3 \\ x_2=\quad y_2+y_3 \\ x_3=\qquad y_3 \end{cases}$

则二次型 f 的标准形为 $f=2y_1^2+y_2^2-6y_3^2$

所用的变换矩阵为 $c=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\left(|c|=1\neq 0\right)$

6、判断二次型的正定性

例 30　参数 k 取何值时，f 是正定二次型

$$f=x_1^2+2x_2^2+(1-k)x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3$$

解　二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$

f正定 $\Leftrightarrow A$正定 $\Leftrightarrow A$的顺序主子式全大于零, 故有

$$A_1=1>0, A_2=\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 2 \end{vmatrix}=2-k^2>0, A_3=\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-k \end{vmatrix}=k(k+1)(k-2)>0$$

解上述不等式得 $-1<k<0$, 因此，当 $-1<k<0$ 时，f 是正定二次型。

35