线性代数试卷

一、（24 分）填空题：

1. 设$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$都是$n$阶方阵，则$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\underline{(-1)^n|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|}$

2. $\boldsymbol{A}^*$是n阶方阵$\boldsymbol{A}$的伴随阵，$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$，则$\left(2\boldsymbol{A}^*\right)^*=\underline{2A}$

3. 设$\boldsymbol{A}$是n阶可逆阵，$\boldsymbol{B}$是n阶不可逆阵，则<u>（D）</u>

（A）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$是可逆阵　　（B）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$是不可逆阵

（C）$\boldsymbol{AB}$是可逆阵　　（D）$\boldsymbol{AB}$是不可逆阵

4. 已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&3&5\\2&0&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&4&1\\1&2&a\\4&6&2\end{pmatrix}$，并且$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，要使$R(\boldsymbol{X})=2$，则$a=\underline{\quad 1\quad}$

5. n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\ (n>3)$线性无关的充分必要条件是<u>（D）</u>。

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$中任意两个向量线性无关

（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$全是非零向量

（C）存在n维向量$\boldsymbol{\beta}$，使得 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关

（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$中任意一个向量都不能由其余两个向量线性表示

6. 设$\boldsymbol{A}$是4×5矩阵，$R(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{B}$是5×5矩阵，$\boldsymbol{B}$的列向量都是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$的解，则$R(\boldsymbol{B})$的最大数为$\underline{\ 3\quad\ }$。

7. n阶方阵$\boldsymbol{A}$与对角阵相似的充分必要条件是<u>（C）</u>

（A）$\boldsymbol{A}$有n个互不相同的特征值　　（B）$\boldsymbol{A}$有n个互不相同的特征向量

（C）$\boldsymbol{A}$有n个线性无关的特征向量　　（D）存在正交阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角阵

8. 3 阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$|2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=0$，$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$，$|\boldsymbol{A}|=0$，则$\boldsymbol{A}$的 3 个特征值为$\underline{0,\ 1,\ -\dfrac{3}{2}}$

二、（8 分）计算 4 阶行列式$D=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a-1 \end{vmatrix}$。

$$D=\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ -1 & a-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$a^4$$

三、（10 分）设 $f(x)=x^8-6400$， $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$， 求 $f(\boldsymbol{A})$。

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^8=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} 81^2 & 0 & 0 \\ 0 & 81^2 & 0 \\ 0 & 0 & 81^2 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^8-6400\boldsymbol{E}$$

$$=\begin{pmatrix} 161 & 0 & 0 \\ 0 & 161 & 0 \\ 0 & 0 & 161 \end{pmatrix}=161\boldsymbol{E}$$

四、（12 分）已知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\m\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\n\end{pmatrix}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ 有相同的秩，

并且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，求 m,n 的值。

$\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，即 $\boldsymbol{\beta}_3$， $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关

$\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3\right|=0$，解得 $n=1$

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 有相同的秩，即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的秩为 2

$\left|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\right|=0$，即 $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&m&1\\2&0&1\end{vmatrix}=0$，解得 $m=2$

五、（10 分）试求 $\boldsymbol{R}^3$ 中的向量 $\boldsymbol{x}$ 在一组基向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 下的坐标 x_1,x_2,x_3 变换到另一组基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ 下的坐标 y_1,y_2,y_3 的变换关系式。

$$\boldsymbol{x}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+y_3\boldsymbol{\beta}_3=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

六、（12 分）已知线性方程组$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\5&3&a+8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\b+7\end{pmatrix}$有无穷多解，求$a,b$的值，并求出通解。

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&0&1&2\\5&3&a+8&b+7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&-1\\0&0&a&b\end{pmatrix}$$

$a=b=0$时，方程组有无穷多解

$$x=c\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

七、（14 分）设对称矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}$满足$|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=0$，

1．求a；

2．求$\boldsymbol{A}$的所有特征值和对应的特征向量；

3．求一个正交矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角阵。

由$|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=0$解得$a=1$

由$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\-2&-\lambda&-2\\0&-2&-1-\lambda\end{vmatrix}=0$解得$\lambda_1=0,\lambda_2=-3,\lambda_3=3$

对应的特征向量为$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

正交矩阵$\boldsymbol{P}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&2\\-1&2&-2\\2&2&1\end{pmatrix}$

八、（10 分）证明题：

1. 已知方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$，证明：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$。

$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow \boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$

$\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}-2(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=-2\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E}$

所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 是可逆矩阵

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2\Rightarrow \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}\Rightarrow \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{O}$

$\Rightarrow \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{O}\Rightarrow \boldsymbol{AB}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 是可逆矩阵，所以 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$

2. 证明集合 $\boldsymbol{V}=\left\{f(x)\;\middle|\;\int_0^1 f(x)dx=0\right\}$ 对于函数的加法和数乘构成实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间。

$f(x),g(x)\in\boldsymbol{V}\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=0,\int_0^1 g(x)dx=0$

$\Rightarrow\int_0^1[f(x)+g(x)]dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 g(x)dx=0\Rightarrow f(x)+g(x)\in\boldsymbol{V}$

$f(x)\in\boldsymbol{V},\lambda\in R\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=0$

$\Rightarrow\int_0^1[\lambda f(x)]dx=\lambda\int_0^1 f(x)dx=0\Rightarrow\lambda f(x)\in\boldsymbol{V}$

所以 $\boldsymbol{V}=\left\{f(x)\;\middle|\;\int_0^1 f(x)dx=0\right\}$ 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间