线性代数试卷

一、(24 分)填空题:

1. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|^2\cdot|\boldsymbol{A}|=\underline{\frac{1}{2}}$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆阵，则下列____C____恒成立。

(A) $(2\boldsymbol{A})^{-1}=2\boldsymbol{A}^{-1}$ (B) $\left(2\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$

(C) $\left[\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}\right]^{\mathrm{T}}=\left[\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\right]^{-1}$ (D) $\left[\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{-1}=\left[\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}\right]^{\mathrm{T}}$

3. 若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ 可由另一向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_{\mathrm{s}}$ 线性表示，则____C____。

(A) $\mathrm{r}\le \mathrm{s}$ (B) $\mathrm{r}\ge \mathrm{s}$

(C) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ 的秩 $\le$ $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_{\mathrm{s}}$ 的秩 (D) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ 的秩 $\ge$ $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_{\mathrm{s}}$ 的秩

4. 当 k 满足____________时，齐次线性方程组 $\begin{cases}kx_1+kx_2+x_3=0\\2x_1+kx_2+x_3=0\\kx_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解。

5. 若齐次线性方程组的一个基础解系为 ξ_1,ξ_2,ξ_3，则____D____也是该其次线性方程组的基础解系。

(A) $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3-\xi_1$ (B) $\xi_1+\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3+\xi_1$

(C) $\xi_1-\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$ (D) $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$

6. 设 4 阶方阵 A 的秩为 2，则其伴随阵 A^* 的秩为____0____。

7. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 的三个特征值为____1，1，-1____。

8. 二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^{\ 2}+2x_1x_2+3x_2^{\ 2}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\underline{\begin{pmatrix}1&1&0\\1&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$。

二、(8 分)计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}0&a&0&b\\a&0&b&0\\0&b&0&a\\b&0&a&0\end{vmatrix}$。

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$=\left(a^2-b^2\right)^2$$

三、（10 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}^{2n}-\boldsymbol{A}^2$（ n 为正整数）。

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{2n}=\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{2n}-\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 0 & 2n-2 & 2n-2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

四、（8 分）设 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$。

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

五、（10 分）设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\k\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$线性相关，求常数$k$；并找出一组最大无关组以及用该最大无关组表示其余向量。

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&k&1\\3&-1&2\end{vmatrix}=0$$

$k=-3$

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$是最大无关组

$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$

六、（14 分）已知线性方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_1+3x_2+5x_3+x_4=3\\x_1-x_2-3x_3+5x_4=3\\x_1-5x_2-11x_3+12x_4=k\end{cases}$$

求k，使得上述方程组有解，并求出所有的解。

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&3&5&1&3\\1&-1&-3&5&3\\1&-5&-11&12&k\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&1&2&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&k-16\end{pmatrix}$$

$k=16$时上述方程组有解

$$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

七、（16 分）设对称矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&1\\0&1&x\end{pmatrix}$，已知$\boldsymbol{A}$有二重特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$，

1. 求x和另一个特征值λ_3；

2. 求$\boldsymbol{A}$的所有特征向量;

3．求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$。

$$|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\ \begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & x\end{vmatrix}=2\cdot 2\cdot\lambda_3$$

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\quad 2+3+x=2+2+\lambda_3$$

$$x=3,\ \lambda_3=4$$

$\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_3=4$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

正交矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ 可使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$

八、（10 分）证明题:

1．设向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 都是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$，则向量 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{a}_s$ 也是该方程组的解。

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}\left(k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{a}_s\right)=k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_s\\ &=k_1\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{b}+\cdots+k_s\boldsymbol{b}\\ &=\left(k_1+k_2+\cdots+k_s\right)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

2．$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是 n 维列向量，并且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{y}$，证明 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交。

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{y}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\ &=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{0}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=0\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交