线性代数模拟试题(四)

一、 填空题：

1.设 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & x & 3 & 4\\1 & 2 & x & 4\\1 & 2 & 3 & x\end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=0$ 的根为__________。

2.设 $a=(1,0,-1)^T$，矩阵 $A=aa^T$， n 为正整数，则 $aE-A^n=$_________。

3.已知向量组 $\alpha_1=(3,1,a)$， $\alpha_2=(4,a,0)$， $\alpha_3=(1,0,a)$，则当 $a=$________时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

4.齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ax_1+bx_2+cx_3=0\\bcx_1+acx_2+abx_3=0\end{cases}$ 有非零解，则 a,b,c 应满足条件__________。

5.设矩阵 $A=\begin{bmatrix}a & 0 & b\\0 & 2 & 0\\b & 0 & -2\end{bmatrix}$ 的一个特征值为 $\lambda_1=-3$，且 A 的三个特征值之积为 -12，则 $a=$________， $b=$________， A 的其他特征值为________。

6.已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换 $X=PY$ 化为 $y_2^2+4y_3^2$， 则 $a=$________， $b=$________。

二、选择题：

1. 记行列式 $\begin{vmatrix}x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3\\3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为（　　　）

A． 1　　B． 2　　C． 3　　D． 4

2.设矩阵 $A=E-\alpha\alpha^T$，其中 α 为 n 维非零列向量，满足 $A^2=A$，则必有

（　　　）

A． $\alpha^T\alpha=0$　　B． $\alpha^T\alpha=1$　　C． $\alpha\alpha^T=0$　　D． $\alpha\alpha^T=E$

3.若向量组α,β,γ线性无关，向量组α,β,δ线性相关，则（　　）

A.α必可由β,γ,δ线性表示

B.β必不可由α,γ,δ线性表示

C.δ必可由α,β,γ线性表示

D.δ必不可由α,β,γ线性表示

4.已知线性方程组$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2\\ 1 & a & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 0\end{bmatrix}$无解，则$a=$（　　　）

A. -1　　B.0　　C. 1　　D.2

5.设A为n阶矩阵，下述结论正确的是（　　　）

A.矩阵A有n个不同的特征根

B.矩阵A与A^T有相同的特征值和特征向量

C.矩阵A的特征向量α_1,α_2的线性组合$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$仍是A的特征向量

D.矩阵A对应于不同特征值的特征向量线性无关

6.设A，B均为n阶实对称矩阵，则A,B合同的充分必要条件是（　　）

A. A,B的秩相等

B. A,B都合同于对角矩阵

C. A,B的特征值相同

D. A,B的正负惯性指数相同

三、解答题

1、证明

（1） $\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x+y & y+z & z+x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} by+az & bz+ax & bx+ay \\ bx+ay & by+az & bz+ax \\ bz+ax & bx+ay & by+az \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$

2.如果n阶矩阵A ，B满足$A^2=A$，$B^2=B$，则$(A+B)^2=A+B$的充分必要条件是$AB=BA=0$ 。

3.设向量$\alpha_1=(1,4,0,2)^T$，$\alpha_2=(2,7,1,3)^T$，$\alpha_3=(0,1,-1,a)^T$，$\beta=(3,10,b,4)^T$，问：

(1) a,b取何值时，β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？

(2) a,b取何值时，β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？并写出此表达式。

4.证明：经过三个定点$(x_i,y_i,z_i),i=1,2,3$的平面方程是

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5.设 A、B 都是n阶矩阵，证明 AB 与 BA 有相同的特征值。

6.用配方法将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$化为标准形，并写出所作的可逆线性变换。