线性代数模拟试题(七)

一、填空题：

1. 如果行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2$，则行列式

$D = \begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{12} & -3a_{11} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{22} & -3a_{21} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{32} & -3a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} =$____________。

2.设 $f(x) = x^2 - 5x + 3$，矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$，定义 $f(A) = A^2 - 5A + 3E$，则

$f(A) =$___________。

3.设向量组 $\alpha_1 = (1,3,6,2)^T$，$\alpha_2 = (2,1,2,-1)^T$，$\beta_3 = (1,-1,a,-2)^T$ 线性无关，则 a 应满足条件__________。

4.二次三项式 $f(x)$ 满足 $f(1) = 1$，$f(-1) = 8$，$f(2) = -3$，则此二次三项式

$f(x) =$__________。

5.设三阶矩阵 $A, A-E$ 和 $E+2A$ 均不可逆，则 $|A+E| =$_________。

6.实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ 对应的二次型为_________，秩为_________。

二、选择题：

1. 下列行列式中，不等于零的是（　　　）

A. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \end{vmatrix}$　　B. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1.5 & 2.5 \end{vmatrix}$

C. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0.5 & 4 & 2.5 \end{vmatrix}$　　D. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$

2. 设 α, β 为两个非零的 n 维列向量，矩阵 $A = E - \alpha\beta^T$，且满足

$A^2=3A-2E$，则$\alpha^T\beta=$（　　　　）

A．-2　　　B．-1　　　C．1　　　D．2

3.已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组中线性无关的是（　　　　）

A. $\alpha_1,3\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2$　　　B. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1-2\alpha_2$

C. $\alpha_1,\alpha_3+\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$　　　D. $\alpha_2-\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2$

4.设n元非齐次线性方程组$AX=b$的导出组$AX=0$仅有零解，则$AX=b$（　　　　）

A.必有惟一解　　　B.必有无穷多解

C.必无解　　　D.未必有解

5.矩阵$A=\begin{bmatrix}0&-2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{bmatrix}$的非零特征值是（　　　　）

A. -4　　　B. -2　　　C. 2　　　D. 4

6.设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，则$A$与$B$（　　　　）

A.合同且相似　　　B.合同但不相似

C.不合同但相似　　　D.不合同且不相似

三、解答题

1.计算$n+1$阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$ （其中$a_i \neq 0$，$i = 1,2\cdots n$）

2.设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，试求与$A$可换的矩阵$B$

3.已知$\alpha_1 = (1,0,2,3)$，$\alpha_2 = (1,1,3,5)$，$\alpha_3 = (1,-1,a+2,1)$，$\alpha_4 = (1,2,4,a+8)$及$\beta = (1,1,b+3,5)$。

⑴a,b为何值时，β不能表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合？

⑵a,b为何值时，β有$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的惟一线性表示式？并写出该表示式。

4.用克莱姆法则解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a + b + c \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = a^2 + b^2 + c^2 \\ bcx_1 + acx_2 + abx_3 = 3abc \end{cases}$$

其中，a,b,c为互不相等的常数。

5.设 A 为n阶正交矩阵，证明：

⑴若n为偶数，且$|A| = -1$，则-1是 A 的特征值；

⑵若n为奇数，且$|A| = 1$，则 1 是 A 的特征值。

6.设 A，B 为可逆矩阵，且 A 与 B 合同，证明A^{-1}与B^{-1}合同。