基本要求与学法指导

矩阵

一、理解矩阵的定义,掌握矩阵的性质及一些特殊矩阵.

矩阵是由$m\times n$个数组成的一个m行n列的矩形表格,通常用大写字母A、B、$C\cdots$表示,组成矩阵的每一个数,均称为矩阵的元素,通常用小写字母a_{ij}、b_{kl}、$c_{pq}\cdots$表示,其中下标i、j、k、l、p、q都是正整数,他们表示该元素在矩阵中的位置.比如,$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$或$A=(a_{ij})_{m\times n}$表示一个$m\times n$矩阵,下标$i$、$j$表示元素$a_{ij}$位于该矩阵的第$i$行、第$j$列.

元素全为零的矩阵称为零矩阵.

特别地,一个 $m\times 1$矩阵$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$,也称为一个$m$维列向量;而一个$1\times n$矩阵$B=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$,也称为一个$n$维行向量.

当一个矩阵的行数m与列数n相等时,该矩阵称为一个m阶方阵.对于方阵,从左上角到右下角的连线,称为主对角线;而从左下角到右上角的连线称为付对角线.若一个 n阶方阵的主对角线上的元素都是1,而其余元素都是零,则称为单位矩阵,记为E_n,即:$En=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.如一个n阶方阵的主对角线上(下)方的元素都是零,则称为下(上)三角矩阵,例如,$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$是一个$n$阶下三角矩阵,而$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$则是一个$m$阶上三角矩阵.

二、理解矩阵与行列式的区别与联系.

矩阵与行列式是两个截然不同的概念,行列式的结果是一个确定的数,其表现形式是 n^2 个数排成的 n 行 n 列,再用两条竖线夹起来,按照一定的规律将这 n^2 个数进行运算得出一个具体的数;而矩阵仅仅是一个矩形的数表,通常用圆括号“()”或方括号“[ ]”将矩形数表夹起来.

只有方阵才可取行列式,方阵与它的行列式是紧密相关的.

三、理解逆矩阵的概念极其存在条件,掌握矩阵求逆的方法与伴随矩阵:

定义 1 设 n 阶矩阵 A 若存在同阶矩阵 B,使 $AB=BA=E$,则称 A 为可逆矩阵,B 为 A 的逆矩阵,简称为 A 的逆,记为 $B=A^{-1}$.

如果是 A 可逆矩阵,那么 A 的逆是唯一的.这是因为当 B,C 都是 A 的逆时,有:

$$AB=BA=E=AC=CA,$$

$$B=BE=B(AC)=(BA)C=EC=C.$$

可逆矩阵的性质:

1、$(A^{-1})^{-1}=A$;

2、如果 A 可逆,数 $\lambda\neq 0$,那么 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$;

3、如果 A 可逆,那么,A^T 也可逆,而且 $(AT)^{-1}=(A^{-1})T$;

4、如果 A,B 皆可逆,那么 AB 也可逆,且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

两个 n 阶矩阵 A 与 B 的乘积 $AB=E$ 时,一定有 $BA=E$,从而 A,B 互为逆矩阵.

定义 2 对任意 n 阶矩阵 A,称 $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ 为 A 的伴随矩阵,其中,A_{ij} 是 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

定理 1 $AA^*=A^*A=|A|E$

定理 2 矩阵可逆的充分必要条件是 $|A|\neq 0$,$A-1=\frac{1}{|A|}A^*$.

推论 1 若 A,B 都是 n 阶矩阵,且 $AB=E$,则 $BA=E$,即 A,B 皆可逆,且 A,B 互为逆矩阵.

(1) 可以从两个方面考察 A^* 的性质.

①已知矩阵的乘法一般不满足交换律,即 $AB \neq BA$.反过来

② A的伴随矩阵 A^*具有相同的性质.

（2）求一个方阵的逆,大致有如下方法:

①依定义求之;

②伴随矩阵法,即 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$;

③初等变换法;

④分块求逆法;

⑤解方程组法……．

其中,用初等变换法求逆简便快捷,容易操作,用图示表示如下:

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix} \text{ 或者 } \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} I \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

定理 3 设 A为 n阶矩阵,下列叙述等价:

(1) A是可逆阵;

(2) A行等价于单位阵 E;

(3) A可表示为一些初等矩阵的乘积.

当 A可逆时可用矩阵的逆求解矩阵方程 $AX = B$.设 A为 n阶可逆阵,则对 $AX = B$两边左乘 A^{-1},有 $X = A^{-1}B$.由于 $A^{-1}(A,B) = (E, A^{-1}B)$而 A^{-1}可表示为一些初等矩阵的乘积,所以把分块矩阵 (A,B)进行行初等变换时,在把子块 A 变为 E的同时,子块 B也就变为 $A^{-1}B$,这就是要求的 X.当然也可以有 A先求出 A^{-1},再作矩阵乘法 $A^{-1}B$.

在解矩阵方程 $XA = B$时,则要右乘 A^{-1},既 $X = BA^{-1}$.或者通过解方程 $A^T X^T = B^T$.先求出 X^T,然后就可以求出 X.

四、熟练掌握矩阵的各种运算:

1、矩阵的加法:如果 $A = (a_{ij})$,$B = (b_{ij})$是两个同型矩阵（即它们具有相同的行数和列数）,则定义它们的和 $A + B$仍为与它们同型的矩阵,$A + B$ 的元素为 A和 B对应元素的和,即:$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

给定矩阵 $A = (a_{ij})$,我们定义其负矩阵 $-A$为:$-A = (-a_{ij})$.这样我们可以定义同型矩阵 A,B的减法为:$A - B = A + (-B)$.由于矩阵的加法运算归结为其元素的加法运算,容易验证,矩阵的加法满足下列运算律:

(1)交换律: $A + B = B + A$;

(2)结合律： $A+(B+C)=(A+B)+C$；

(3)存在零元：$A+O=O+A=A$；

(4)存在负元： $A+(-A)=(-A)+A=O$．

2、数与矩阵的乘法：

定义数 λ 与矩阵 A 的乘积 λA，λA 中的元素就是用数 λ 乘 A 中对应的元素的得到，即 $\lambda A=(\lambda a_{ij})$．由定义可知：$(-1A)=-A$．容易验证数与矩阵的乘法满足下列运算律：

(1) $1A=A$；

(2) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$；

(3) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$；

(4) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)=\mu(\lambda A)$．

3、矩阵的乘法：

设 $A=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 为 $n\times l$ 矩阵,则矩阵 A 可以左乘矩阵 B（注意:矩阵 A 的列数等与矩阵 B 的行数）,所得的积为一个 $m\times l$ 矩阵 C ,即 $AB=C$,其中 $C=(c_{ij})$，并且 $cij=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$．

矩阵的乘法满足下列运算律（假定下面的运算均有意义）：

(1)结合律：$(AB)C=A(BC)$；

(2)左分配律：$A(B+C)=AB+AC$；

(3)右分配律：$(A+B)C=AC+BC$；

(4)数与矩阵乘法的结合律：$(\lambda A)B=\lambda(AB)=A(\lambda B)$；

(5)单位元的存在性：$E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}$，$A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$．

若 A 为 n 阶方阵，则对任意正整数 k，我们定义：$A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k}$，由于矩阵乘法满足结合律，我们有：$A^kA^l=A^{k+l}$，$(A^k)^l=A^{kl}$．

4、矩阵的转置：

定义 3　设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 为 $m\times n$ 矩阵，我们定义 A 的转置为一

个 $n\times m$ 矩阵，并用 A^T 表示 A 的转置，即：$AT=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. 矩阵的转置运算满足下列运算律：

（1）$(A^T)^T=A$ ；　　（2）$(A+B)^T=A^T+B^T$ ；

（3）$(\lambda A)^T=\lambda A^T$；　　（4）$(AB)^T=B^TA^T$

注意：

（1）矩阵运算与数的运算规律有些是相同的,但也有许多不同之处,学习时应注意它们之间的差异,切不可将数的所有运算照搬到矩阵中来.例如两数 a 与 b 的乘法满足交换律,即 $ab=ba$,但两个矩阵 A 与 B 的乘法一般不满足交换律，即 $AB\neq BA$，由此产生 $(AB)^n\neq(BA)^n$, $(A\pm B)^2\neq A^2\pm 2AB+B^2$, $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$ 等.

（2）矩阵乘法是矩阵运算中的重点,学习是应注意以下几点:

① 只有当左边矩阵 A 的列数等于右边 B 矩阵的行数时, A 与 B 才能相乘;

②一般情形下,矩阵乘法不满足交换律,即 $AB\neq BA$.若矩阵 A 与 B 满足 $AB=BA$,则称矩阵 A 与 B 是可交换的;

③两个不为零的矩阵的乘积可以是零;

例如 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$　$AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

④一般的,矩阵的乘法不满足消去律,即当 $AB=AC$ 时,不一定有 $B=C$;

例如 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$　$C=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　$AB=AC=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

但 $B\neq C$

5、对称矩阵：

定义 4　n 阶方阵 A 若满足条件：$A^T=A$，则称 A 为对称矩阵；若满足条件：$A^T=A$，则称 A 为反对称矩阵．若设 $A=(a_{ij})$，则 A 为对称矩阵，当且仅当 $a_{ij}=a_{ji}$ 对任意的 $i,j=1,2,\cdots,n$ 成立；A 为反对称矩阵，当且仅当 $a_{ij}=-a_{ji}$ 对任意的 $i,j=1,2,\cdots,n$ 成立．从而反对称矩阵对角线上的元素必为零．

对称矩阵具有如下性质：

(1) 对于任意 $m\times n$ 矩阵 A，A^TA 为 n 阶对称矩阵；而 AA^T 为 m 阶对称矩阵；

(2) 两个同阶（反）对称矩阵的和，仍为（反）对称矩阵；

(3) 如果两个同阶（反）对称矩阵 A,B 可交换，即 $AB=BA$，则它们的乘积 AB 必为对称矩阵，即 $(AB)^T=AB$。

思考题：

1 、设 $e_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\cdots i$ 为第 i 个分量为 1，而其余分量为零的 m 维列向量，

$$e_j=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\cdots j$$

为第 j 个分量为 1，而其余分量全为零的 n 维列向量，$A=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 矩阵，试计算 $e_i^TAe_j$；

2 、设 A 为 n 阶方阵，并且对任意 m 维列向量 α，n 维列向量 β 都有 $\alpha^TA\beta=O$，你能得出什么结论？

五、熟练掌握分块矩阵的运算.

在对阶数较高的矩阵进行运算时常常把矩阵分成适当的小块矩阵，然后把每个小块当作“数”一样处理，使运算简便.

定义 5　用水平线和垂直线将矩阵 A 分成若干个小矩阵，并将 A 看成这些小矩阵为元素的矩阵.就称 A 为分块矩阵，其中每个小矩阵称为 A 的子矩阵.由此可知，将矩阵 A 分块的方式不是唯一的，将 A 分块得

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1q}\\ A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2q}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ A_{p1}&A_{p2}&\cdots&A_{pq}\end{pmatrix}=(A_{ij})_{p\times q}$$

，这里 $m_1+m_2+\cdots+m_p=m$，$n_1+n_2+\cdots+n_q=n$ 其中子矩阵 A_{ij} 是 $m_i\times n_j$ 的矩阵，$i=1,2,\cdots,p$；$j=1,2,\cdots,q$

分块矩阵有下列性质：

1、如果 A 和 B，且用同样分法表示为分块矩阵，那么

$A\pm B=(A_{ij}\pm B_{ij})$，$\lambda A=(\lambda A_{ij})$

2、对 A 的列的分块方法与对 B 的行的分块方法一致，即

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pt} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2q} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tq} \end{pmatrix}$$ 则

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1q} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pq} \end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}$，$i=1,2,\cdots,p$；$j=1,2,\cdots,q$ 在将小块矩阵当作“数”来做分块乘法时，必须注意相乘因子的先后顺序，只能是 $A_{ik}B_{kj}$，不允许是 $B_{kj}A_{ik}$.

3 设分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix}$$，容易验证：$$A=\begin{pmatrix} A^{T}{}_{11} & A^{T}{}_{12} & \cdots & A^{T}{}_{1q} \\ A^{T}{}_{21} & A^{T}{}_{22} & \cdots & A^{T}{}_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A^{T}{}_{p1} & A^{T}{}_{p2} & \cdots & A^{T}{}_{pq} \end{pmatrix}$$

六、熟练掌握矩阵的初等变换，特别的，若可逆矩阵 A 作下列变化时，则 A^{-1} 相应地有以下变化：

定义 6　矩阵的行（列）初等变换是指下列三种变换：

1、互换矩阵中 i，j 两行的位置，记为 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$；

2、用非零常数 k 乘矩阵的第 i 行（列），记为 $kr_i(kc_i)$；

3、把矩阵第 i 行（列）的 k 倍加到第 j 行（列）上去，记为 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$

矩阵的行初等变换和列初等变换统称为矩阵的初等变换.

定义 7　由 n 阶单位阵 E 经过一次行初等变换后得到的 n 阶矩阵称初等阵，分别记为

$$p(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & 0 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{T}{}_{1} \\ \\ \\ e_{T\,j} \\ \\ \\ e^{T}i \\ \\ \\ e^{T}n \end{pmatrix}$$

$$P(i(k))=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{T}{}_{1} \\ \vdots \\ \vdots \\ ke^{T}{}_{i} \\ \vdots \\ \vdots \\ e^{T}{}_{n} \end{pmatrix}$$

$$p(i(k),j)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & k & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{T}{}_{1} \\ \vdots \\ e^{T}{}_{i} \\ \vdots \\ e^{T}{}_{j}+ke^{T}{}_{i} \\ \vdots \\ e^{T}{}_{n} \end{pmatrix}$$

必须指出,由 n 阶单位阵 E 经过一次列初等变换后得到的 n 阶矩阵也称为初等矩阵,其中,对应于第一种和第二种列初等变换的初等矩阵就是 $p(i,j)$ 和 $p(i(k))$, 但是对应于第三种列初等变换的初等矩阵是 $p(i(k),j)=p(j(k),i)$,即:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_i & \cdots & e_j+ke_i & \cdots & e_n \end{pmatrix}$$

借助于初等矩阵,可把矩阵的初等变换通过乘法表示出来.

定理 4 对矩阵 A 作某一类行（列）初等变换,相当于用对应的 m 阶（n 阶）初等阵左（右）乘矩阵 A.

① A中第i行与第j行互换;

② A中第i行乘以非零数c;

③ A第j行;

则①因为$(P_{(ij)})^{-1}=A^{-1}P_{(ij)}^{-1}$,所以对$A$交换$i$, j行后的逆,等于A^{-1}交换i, j两列;

②因为$(P_{i(c)}A)^{-1}=A^{-1}P_{(i(\frac{1}{c}))}$,所以$A$的第$i$行乘以非零数$c$以后的逆,等于$A$的逆的第$j$列乘以$1/c$;

③因为$(P_{(i,j(k))}A)^{-1}=A^{-1}P_{(i,j(-k))}$,所以$A$的第$j$行乘以数$k$加到第$i$行后的逆,等于$A^{-1}$的第$j$列乘以数$-k$加到第$i$列.

定义 8 如果矩阵A经过有限次行（列）初等变换变为矩阵B,就称A行（列）等价于B.如果矩阵A经过有限次初等变换变为B,就称矩阵A等价于矩阵B,记为$A\to B$.

矩阵的行等价（列等价、等价）满足如下定律:

1 自反律 $A\to A$;

2 对称律 如果 $A\to B$,那么$B\to A$;

3 传递律 如果$A\to B$, $B\to C$,那么,$A\to C$.

在数学中,把具有上述三条规律的关系称为等价关系.因此矩阵的等价是一种等价关系.

定义 9 一个矩阵中每个非零行的首元素（指该行第一个非零元素）出现在上一行首元素的右边,同时,没有一个非零行出现在全零行的下方,这样的矩阵称为阶梯形矩阵.

定理 5 任何一个非零矩阵A可经过有限次初等变换化为下面形似的矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$1\le r\le \min(m,n)$, 它称为矩阵A的标准形.

因此每个矩阵A与它的标准形等价.

推论 2　任意一个非零矩阵 A，一定存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q，使

$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是 A 的标准形．

推论 3　设 A，B，A 与 B 等价的充要条件是 AB 有相同的标准形．

向量

一、理解 n 维向量，向量组的线性组合的概念，掌握线性表示．

二、理解向量组线性相关，线性无关的概念与性质．

线性相关与线性无关的概念都是针对一个特定的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 而言的．当向量组确定后，我们自然会问：是否存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0\cdots\cdots(*)$．答案只有两种：存在或不存在．若存在，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关；或不存在，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关．这里的 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零，是指这 m 个常数中至少有一个不为零．特别对线性相关的向量组而言，由于这组向量是缺点的，从而使 $(*)$ 式处理的不全为零的各组数也不同．

定义 1　对向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，如果存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m=0$ 那么，称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关．如果这样的 m 个数不存在，即上述向量等式仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时才能成立，就称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关．

含零向量的向量组 $0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 一定线性相关，因为 $10+0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m=0$ 其中，$1,0,0,\cdots,0$ 不全为零．

只有一个向量 α 组成的向量组线性无关的充分必要条件是 $\alpha\neq 0$，线性相关的充分必要条件是 $\alpha=0$

考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=0 \end{cases} \qquad (*)$$

它可以写成 $AX=0$，或 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_m\alpha_m=0$，

其中 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，$\alpha_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, j=1,2,\cdots,m$，$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$.

由此可见，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组(*)有非零解．也就是说，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充分必要条件是齐次线性方程组(*)只有零解．

例 1 向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$是线性无关的．

解：设有 x_1,x_2 使 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=0$ 即 $x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -` \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}=0$，

得齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$．

解此方程组得 $x_1=x_2=0$，所以向量组 α_1,α_2 线性无关．

例 2 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，又设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$，证明向量组 β_1,β_2,β_3 也线性无关．

证明：设有 k_1,k_2,k_3 使 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，

即 $(k_1+k_2)\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+(k_3+k_1)\alpha_3=0$，

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故有 $\begin{cases} k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \\ k_3+k_1=0 \end{cases}$

此线性方程组只有零解 $k_1=k_2=k_3=0$，也即向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关．

定理 1 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m (m\geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量可以由其余 $m-1$ 个向量线性表示．

证明：必要性 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，即存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$．不妨设 $k_1\neq 0$，则有 $\alpha_1=(-\frac{k_2}{k_1})\alpha_2+\cdots+(-\frac{k_m}{k_1})\alpha_m$，即 α_1 可以由其余 $m-1$ 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表

示．其实，在向量等式 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 中，任何一个系数 $k_i\neq0$ 的向量 α_i 都可以由其余 $m-1$ 个向量线性表示．

充分性　设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示．不妨设 $\alpha_1=\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m$，则 $(-1)\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$，

因为 $(-1),\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 不全为零，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关．

向量组线性相关和线性无关判别定理

设矩阵 A 的列向量组为 A∶$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，矩阵 B 的列向量组为 B∶$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，其中矩阵 B 是通过对矩阵 A 做行初等变换后得到的．我们有以下

定理 2　向量组 A 与向量组 B 有相同的线性相关性．

证明：记 A∶$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，$B$∶$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$．那么，当且仅当齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解时向量组 A 线性相关．当且仅当齐次线性方程组 B 有非零解时向量组 A 线性相关．由于齐次线性方程组 $BX=0$ 或者只是对调了 $AX=0$ 的第 k 个方程与第 l 个方程的位置，或者只是用非零数 λ 乘 $AX=0$ 的第 k 个方程，或者只是把 $AX=0$ 的第 l 个方程的 λ 倍加到第 k 个方程上去，这连个方程组一定是同解的，所以，对应的向量组 A 与 B 有相同的线性相关性．

定理 3　如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，那么 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_r$，$\alpha_{r+1}\cdots,\alpha_m$ 也线性相关．

证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，即存在不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 使

$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0$，于是 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r+0\alpha_{r+1}+\cdots+0\alpha_m=0$，但是，$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_r,0,\cdots,0$ 仍不全为零，因此，向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m$ 线性相关．

推论 1　线性无关向量组的任意一个非空部分组仍是线性无关向量组．

定理 4　设有 n 维向量组 $A:\alpha_i=\begin{pmatrix}\alpha_{1i}\\ \alpha_{2i}\\ \vdots\\ \alpha_{ni}\end{pmatrix},i=1,2,\cdots,m$ 与 $n+1$ 维向量组

$$B:\beta_i=\begin{pmatrix}\alpha_{1i}\\ \alpha_{2i}\\ \vdots\\ \alpha_{ni}\\ \alpha_{n+1i}\end{pmatrix}, i=1,2,\cdots,m$$

如果向量组 A 线性无关，那么，向量组 B 也线性无关.

推论 2　r 维向量组的每一个向量添加 $n-r$ 个分量成为 n 维向量. 如果 r 维向量组线性无关，那么，n 维向量组也线性无关. 反言之，如果 n 维向量组线性相关，那么，r 维向量组也线性相关.

定义 2 在 $m\times n$ 型的矩阵 A 中，任取 k 行 k 列 $k\le m, k\le n$，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的 k 阶矩阵行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式.

$m\times n$ 型矩阵 A 的 k 阶子式共有 $\binom{m}{k}\binom{n}{k}$ 个.

定理 5　设 n 维向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r(r\le n)$ 构成矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1r}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2r}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nr}\end{pmatrix}$$

则向量组 A 线性无关的充分必要条件是矩阵 A 中存在一个不等于零的 r 阶子式.

推论 3　n 个 n 维向量组线性无关的充分必要条件是它们所构成的 n 阶矩阵的行列式不等于零.

推论 4　当 $m>n$ 时，m 个 n 维向量　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 必线性相关.

思考题：

1、举例说明下列各命题是错误的

(1) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则 α_1 可由 $\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示；

(2) 若有不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_m\beta_m=0$ 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 也线性相关；

(3) 若只有当 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 全为零时，等式

$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_m\beta_m=0,$

才能成立 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 也线性无关；

（4） 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，也线性相关，则有不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使

$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$，$\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_m\beta_m=0$

同时成立.

2、判断下列向量组是否线性相关：

（1） $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\1\\2\\-4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\5\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\3\end{pmatrix}$；

（2） $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\-2\\4\\6\end{pmatrix}$；

（3） $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\5\\-7\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}7\\-13\\20\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix}$；

（4） $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\\-8\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\9\\27\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\4\\16\\64\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

3、设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，讨论向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_r+\alpha_1$ 的线性相关性.

4、设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性无关，$\zeta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性相关，则 ζ 必可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性表示.

5、选择题

（1） n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(3\le s\le n)$ 线性无关的充分必要条件是

A、存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$；

B、$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关 ；

C、$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中存在一个向量，它不能由其他向量线性表示；

D、$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意一个向量都不能被其他向量线性表示.

（2） 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则向量组

A、$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 也线性无关；

B、 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$也线性无关；

C、 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$也线性无关；

D、 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$也线性无关.

(3) 设有任意两个n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$.如果存在两组不全为零的数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$与$k_1,k_2,\cdots,k_m$使

$$(\lambda_1+k_1)\alpha_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\alpha_m+(\lambda_1-k_1)\beta_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\beta_m=0$$

则

A、 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性相关；

B、 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性无关；

C、 $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$线性无关；

D、 $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$线性相关.

等价向量组及其性质 ：

设有两个n维向量组

A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$

B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$

定义 3　如果向量组A中每一个向量组都能由向量组B中的向量线性表示,我们称向量组A可由向量组B线性表示,而向量组也可以由向量组A线性表示,我们称向量组A和向量组B等价.

向量组A能由向量组B线性表示,也就是存在数$k_{ij},i=1,2,\cdots s;\ j=1,2,\cdots,r$使

$\alpha_j=k_{1j}\beta_1+k_{2j}\beta_2+\cdots+k_{sj}\beta_j,\ j=1,2,\cdots,r$如果记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$，

$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，

$$K=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr} \end{pmatrix},$$

我们有

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)K$，即$A=BK$.

定理 6　如果向量α可以由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性表示,而向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$可以由向量组$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$线性表示,那么向量$\alpha$可以由向量组

$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 线性表示.

证明:由定理条件可知,存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$,使

$$\alpha = k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_r\beta_r = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix},$$

又存在 $s\times r$ 矩阵 C 使

$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s)C$,

于是 $\alpha=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s)C\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix}=(\gamma_1,\gamma_2,,\gamma_s)\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_s \end{pmatrix}$

可以由向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 线性表示,其中 $C\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_s \end{pmatrix}$.

向量组之间的等价是一种等价关系.它满足以下三条:

1、自反律:向量组 A 与自身等价;

2、对称律:如果向量组 A 与向量组 B 等价,那么,向量组 B 与向量组 A 等价;

3、传递律:如果向量组 A 与向量组 B 等价,向量组 B 与向量组 C 等价,那么向量组 A 与向量组 C 等价.

三、理解秩的概念,并掌握求矩阵的秩和向量组的秩的基本方法.

定义 4　设 T 是 n 维向量组,如果

1、在 T 中有 r 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

2、对任意的向量 $\alpha\in T$,向量组 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 总是线性相关的,

那么称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量组 T 的一个最大线性无关组,简称为最大无关组;数 r 称为向量组 T 的秩,记做 $rank(T)=r$;并规定只含零向量的向量组没有最大线性无关阻挡,从而它的秩为 0.

向量组的最大无关组具有如下性质:

(1)向量组的最大无关组和向量组本身等价.

(2)向量组线性无关的充分必要条件是它所含的向量个数等于它

的秩.

(3)向量组中任意一个向量可以由最大无关组惟一地线性表示.

由此可见,向量组的最大无关组不一定唯一,但是向量组的最大无关组之间是等价的,并且它们所含的向量个数是相等的,这就是向量组的秩.

定理 7 设有两个 n 维向量组

A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$

B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$

如果向量组 A 能由向量组 B 线性表示,且 $r>s$,则向量组 A 线性相关.

证明:记

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r),\quad B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$$

由定理条件,存在 $s\times r$ 矩阵 $K=(k_{ij})$ 使 $A=BK$,记 $K=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)$,其中 $\gamma_j=\begin{pmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{sj}\end{pmatrix}, j=1,2,\cdots,r$.

因为 $r>s$,由推论 4, $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 线性相关,即存在 r 个不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$,使 $(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_r\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_r\end{pmatrix}=0$

同时,这 r 个不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 使

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_r\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_r\end{pmatrix}=BK\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_r\end{pmatrix}=0$$

即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关.

推论 5 设有两个 n 维向量组

A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$

B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$

若 向量组 A 可由向量组 B 线性表示,且向量组 A 线性无关,那么,$r\le s$.

推论 6 等价地线性无关向量组所含向量个数相等.

推论 7　设向量组 A 的秩为 r_1，向量组 B 的秩为 r_2，如果向量组 A 能由向量组 B 线性表示，$r_1 \le r_2$.

推论 8　等价的向量组的秩相等.

定义 6 矩阵 A 的行向量组的秩称为 A 的行秩，矩阵 A 的列向量组的秩称为 A 的列秩.

定理 8 设 A 的列秩等于 r 的充分必要条件是 A 中有一个 r 阶子式 $D_r \ne 0$，并且所有含 $r+1$ 阶的子式（如果存在的话）$D_{r+1}=0$.

推论 8　设 A 为矩阵，则

(1)　A 的列秩 $= A^T$ 的列秩；

(2)　A 的列秩 A 的行秩.

定义 7　矩阵 A 的行秩和列秩通称为 A 的秩，记为 $R(A)$.

显然，矩阵 A 的秩是唯一确定的，并且，$R(A) \le \min\{m,n\}$，零矩阵的秩等于 0.

推论 9　矩阵 A 中有一个 r 阶子式不为 0，则 $R(A) \ge r$，矩阵 A 中所有 r 阶子式全为 0，则 $R(A) > r$.

由于矩阵的秩与构成这个矩阵的行向量组或列向量组的秩相同，因此，它们求秩的方法可以相互转化.这些基本方法为：

1、子式法：将 m 个 n 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 写成 $m\times n$ 的矩阵（即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为行做矩阵），或写成 $n\times m$ 的矩阵（即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为列矩阵），然后计算该矩阵的各接子式.从阶数最低的子式开始，找到不等于零的子式中阶数最大的一个子式，则这个子式的阶数就是矩阵的秩，也是这组向量的秩.并且这个子式中的行（或列）对应的 向量组就是所给向量组的一个最大线性无关组.

2、初等变换法：用矩阵的初等行（或列）变换，把所给矩阵化为阶梯形矩阵.由于阶梯形矩阵的秩就是阶梯形矩阵中非零行（或列）的个数.

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩.

解：计算 A 的 2 阶子式

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & 12\end{vmatrix}\neq 0,$$

A中所有的含D_2的 3 阶子式有 2 个.经计算,2 个 3 阶子式全为 0,所以$R(A)=2$.

例 2 证明$R(AB)\le\min\{R(A),R(B)\}$

证明：记$C_{m\times n}=A_{m\times s}B_{s\times n}$,其中$C=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$表示乘列向量矩阵，由于$C=AB$,即

$$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)(b_{ij})_{s\times n}.$$

于是

$$\lambda_j=\sum_{i=}^{s}b_{ij}\alpha_i,\ j=1,2,\cdots,n.$$

因此,C的列向量组能由A的列向量组线性表示，由推论 10.5 知道$R(C)\le R(A)$.又由于$C^T=B^TA^T$,因此,$R(C)=R(C^T)\le R(B^T)=R(B)$.这就是说:

$R(AB)\le\min\{R(A),R(B)\}$

思考题:

1、求下列向量组的秩和它的一个最大线性无关组

(1) $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\4\\-2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\-3\\1\\1\end{pmatrix}$;

(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$;

(3) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix}$.

2、求下列矩阵的秩

(1) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -4 & 4\end{pmatrix}$,　　(2) $\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & -3 & -2\\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3\\ 7 & 0 & 5 & -1 & 8\end{pmatrix}$.

3、在秩为r的矩阵中有没有等于 0 的$r-1$阶子式?有没有等于 0 的r阶子式?有没有不等于 0 的$r-1$阶子式?

4、从矩阵 A 中划去一行得到的矩阵记为 B，问 $R(A)$ 与 $R(B)$ 的关系怎样？

5、秩相等的向量组必等价吗?秩相等的矩阵必等价吗？

6、选择题

(1) 设 A 是 n 阶矩阵，其秩 $r<n$，那么 A 的 n 个行向量中

A、必有 r 个行向量线性无关；

B、任意 r 个行向量线性无关；

C、任意 r 个行向量构成一个极大线性无关组；

D、任意一个行向量可由其他 r 个向量线性表示.

(2) 设 A 是 4 阶矩阵，A 的行列式 $|A|=0$，则 A 中

A、必有一列元素全为零.

B、必有两列元素对应成比例；

C、必有一个列向量是其余列向量的线性组合；

D、任意一个列向量是其余列向量的线性组合.

(3) 若 A 是 n 阶矩阵 $(n\geq 3)$，且 $R(A)=n-2$，则

A、 A 的列向量组线性无关；

B、 A 的伴随矩阵 $A^*=0$；

C、 A 可逆，且 $R(A^{-1})=n-2$；

D、 A 的所有 $n-1$ 阶子式不等于零.

7、设 A 是 $n\times m$ 型的矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$，又 E 是 n 阶单位阵，且 $AB=E$，证 B 的列向量组线性无关.

向量空间的基和维数

定义 8　设 V 是数域 F 上的向量空间，如果

1、在 V 中有 r 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

2、V 中任意一个向量 α 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示.

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量空间 V 的一组基，r 称为向量空间 V 的维数，并称 V 是 r 维向量空间.

如果向量空间没有基，那么 V 的维数为 0，称 V 是 0 维向量空间. 显然，0 维向量空间只含一个零向量 .

如果把向量空间看作是一个向量组，那么，向量空间 V 的基就是它的一个最大无关组，V 的维数就是它的秩 .

例 1 向量空间

$V=\left\{x=\begin{pmatrix}0\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\mid x_2,\cdots,x_n\in R\right\}$,的一个基是 $\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$,$\cdots$, $\varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 显然,$n-1$个向量 $\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_n$是线性无关的,且对任意 $\alpha\in V_1$,

$$\alpha=\begin{pmatrix}0\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$$

由此可知,V_1是实数域 R 上 $n-1$维向量空间.

例 2 由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$张成的向量空间

$$V(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\{\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m\mid\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in R\},$$

如果把$V_1(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$看成是向量组,那么,$V_1(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$和 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$等价,如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(r\le m)$是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的一个最大无关组,那么,它也就是向量空间$V_1(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$的一个基,从而$V_1(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$是 r维向量空间.

思考题:

1、设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组 n 维向量,已知 n 维基本单位向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$能由它们线性表示,证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

2、设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组 n维向量,证明它们线性无关的充分必要条件是任意一个n维向量都可以由它们线性表示.

3、设向量组 A与向量组 B的秩相等,且 A组能由 B线性表示,证明 A组与 B等价.

4、设 $\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_r$, $\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_r$, $\beta_r=\alpha_1+\cdots+\alpha_{r-1}$,证明向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$秩相等.

5、设向量组 $A:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$, $B:\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$, $C:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$,证明:

(1) 秩 $A:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}\le$秩 $C:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$

(2)秩 $C:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}\le$秩 $A:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$+秩 $B:\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$

6、设

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\ B=(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&4\\0&3\\-4&2\end{pmatrix}.$$

验证：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的一个基,并用这个基线性表示$\beta_1,\beta_2$.

7、由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$,$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$张成的向量空间记为$V_1$,由$\beta_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\-3\end{pmatrix}$,$\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$张成的向量空间记为$V_2$,试证:$V_1=V_2$

8、已知向量组 (I)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$,(II) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$,如果各向量组的秩分别是

向量的内积（或称点积或数量积）

设 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$,$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$是任意空间$n$维向量.

定义 9　向量α和β的内积(又称为点积或数量积)是一个实数$\alpha\cdot\beta$（或记做(α,β)）

$$\alpha\cdot\beta=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

内积满足以下规律:

(1)正定性:$\alpha\cdot\alpha\ge 0$且$\alpha\cdot\alpha=0$当且仅当$\alpha=0$

(2)对称性:$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$,

(3)线性:$(\alpha+\alpha')\cdot\beta=\alpha\cdot\beta+\alpha'\cdot\beta$,$(k\alpha)\cdot\beta=k(\alpha\cdot\beta)$,其中$\alpha,\alpha',\beta\in R^n,k\in R$.

定义 10　空间向量α的长度是一个给定的实数$\sqrt{\alpha\cdot\alpha}$,记为$\|\alpha\|$,即$\|\alpha\|=\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}$.

定义的向量的长度还有以下性质:

(1)正定性:$\|\alpha\|\ge 0,\|\alpha\|=0,$ 当且仅当$\alpha=0$

(2)$\|k\alpha\|=|k|\|\alpha\|$

(3)$|\alpha\cdot\beta|\le\|\alpha\|\|\beta\|$;

(4)$\|\alpha\cdot\beta\|\le\|\alpha\|\|\beta\|$;（三角不等式）.

四、理解两个矩阵的等价与两个向量组的等价的区别和联系.

两者的区别:两个矩阵 A 与 B 等价,是指 A 可通过若干次矩阵的初等变换变为 B,因此等价的两个矩阵必是同型的.两个向量组等价,是指这两个向量组能相互线性表示,它们所含的向量个数未必相等.

两者的联系:若矩阵 A 通过矩阵的初等行变换变为矩阵 B,则矩阵 A 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.若矩阵 A 通过矩阵的初等列变换变为矩阵 B,则矩阵 A 的列向量组与矩阵 B 的行向量组等价.

定理 9　如果矩阵 A 经过有限次行(列)初等变换变到矩阵 B,那么 A 的行(列)向量所成的向量组与 B 的行(列)向量所成的向量组等价.

证明 :只要对行初等变换来证明即可.设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots\\ \alpha_i^T\\ \vdots\\ \alpha_j^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix},\text{其中 }\alpha_i=\begin{pmatrix}a_{i1}\\ a_{i2}\\ \vdots\\ a_{1n}\end{pmatrix}$$

是矩阵 A 的第 i 行的转置, $i=1,2,\cdots,m$.对 A 进行一次行初等变换,相当于用对应的 m 阶初等阵左乘 A,即得

$$A(i,j)=P(i,j)A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots\\ \alpha_j^T\\ \vdots\\ \alpha_i^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix}=B_1 \text{ 或 } A(i(k))=P(i,j)A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots\\ k\alpha_i^T\\ \vdots\\ \alpha_j^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix}=B_2$$

或 $$A(j(k),i)=P(j(k),i)A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots\\ \alpha_i^T+k\alpha_j^T\\ \vdots\\ \alpha_j^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix}=B_3$$

显然，B_1（或 B_2 或 B_3）的行向量组和 A 的行向量组可以互相线性表示．因此，A 经过一次行初等变换到 B，A 与 B 的行向量组等价，由向量组等价的传递性可知，A 经过有限次行初等变换变到矩阵 B 时，A 与 B 的行向量组等价．

定理 10　如果矩阵 A 经过有限次行(列)初等变换变到矩阵 B，则 B 的任意 k 个列(行)向量所成的向量组与 A 的对应的 k 个列(行)向量所成的向量组有相同的线性关系．

定理 11　设 A 与 B 是同型矩阵，则 A 与 B 等价的充分必要条件是 $R(A)=R(B)$．

证明：由推论 8 和定理 10 即可．

推论 10　设 A 与 B 是同型矩阵，则 A 与 B 等价的充分必要条件是存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q，使 $PAQ=B$．

证明：由矩阵等价的定义即知．

线性方程组

一、理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件．

设有 B 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (*)$$

如果方程组有解，就称方程组为相容的，否则就称为不相容的．记

$$\alpha_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, j=1,2,\cdots,n，\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}，X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

线性方程组(*)可写成向量方程的形式

或写成矩阵方程的形式　$AX=\beta$

其中，$A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)$ 是系数矩阵．

易见下述结论等价：

(1)线性方程组(*)有解；

(2)向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示;

(3)向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$等价;

增广矩阵 $\tilde{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta)$ 的秩相等.

从而我们得到线性方程组(*)有解的判别定理 .

定理 1 线性方程组(*)有解的充分必要条件是它的系数矩阵 A 与增广矩阵 $\tilde{A}$ 有相同的秩.

定理 1 与用 $Gauss$ 消元法解线性方程组的判定方法是一致的.这是因为,用行初等变换把 $\tilde{A}$ 化成阶梯行矩阵 $\tilde{B}$ 的同时,A 也化成了阶梯行矩阵 B,并且 B 就是由 $\tilde{B}$ 的前 n 列所组成,因此出现“ $d_{r+1}\neq 0$ ”当且仅当 $R(A)=R(\tilde{A})-1$,从而方程组无解;否则,一定有 $R(A)=R(\tilde{A})$,从而方程组有解.

推论 1 线性方程组(*)有解时,如果 $R(A)=n$,那么方程组只有唯一解 ;如果 $R(A)<n$,那么,方程组有无限多解.

考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \qquad (**)$$

记 $A\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

式(**)可写成 $AX=O$

如果 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \zeta_{11} \\ \zeta_{21} \\ \vdots \\ \zeta_{n1} \end{pmatrix}$ 是方程组(**)的解,那么

$$X=\zeta_1=\begin{pmatrix} \zeta_{11} \\ \zeta_{21} \\ \vdots \\ \zeta_{n1} \end{pmatrix}$$

称为齐次线性方程组(**)的一个解向量,或称为它的一个解

(**)的解 .

推论 2 齐次线性方程组 $AX=O$ 有非零解的充分必要条件是 $R(A)<n$.

显然,当 $m=n$ 时,(**)有非零解的充分必要条件是 $|A|=0$.特别地,当 $m<n$ 时,(**)必有非零解.

二、理解齐次线性方程组解的结构、基础解系的概念.掌握用矩阵方法求解齐次线性方程组.

齐次线性方程组解的结构

我们首先讨论齐次线性方程组(**)的解的结构.

(1)如果 $X=\zeta_1$, $X=\zeta_2$ 是(**)的解,那么 $X=\zeta_1+\zeta_2$ 也是(**)的解.

(2)如果 $X=\zeta_1$ 是(**)的解,k 为任意数,那么 $X=k\zeta_1$ 也是(**)的解.

设 $S=\{\zeta \mid A\zeta=0\}$ 是齐次线性方程组(**)的解向量全体所成的非空集合.性质（1）和（2）表明

1、 $\zeta_1\in S$, $\zeta_1\in S$ 时, $\zeta_1+\zeta_2\in S$;

2、 $\zeta_1\in S$, $k\in R$ 时, $k\zeta_1\in S$ k.

由定义,非空集合 S 成为数域 F 上的一个向量空间,称为齐次线性方程组(**)的解空间.因此,我们要解齐次线性方程组(**),只要求出解空间的一个基.设解空间的一个基是 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_t$,又齐次线性方程组的任意一个解均可由这个基唯一地线性表示,即 任意 $\zeta\in S$,

$$\zeta=k_1\zeta_1+k_2\zeta_2+\cdots+k_t\zeta_t,\ k_1,k_2,\cdots,k_t\in F.$$

解空间 S 的一个基，又称为齐次线性方程组(**)的一个基础解系 .

下面来求 n 元齐次线性方程组(**)的一个基础解系 .

定理 2 设 n 元齐次线性方程组(**)的系数矩阵的秩 $R(A)=r<n$,那么它必有基础解系,并且基础解系所含线性无关解向量个数等于 $n-r$ （ 这里, $n-r$ 也正是方程组(**)的自由未知数的个数 ）.

三、理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念.

现在,我们来考虑一般的非齐次线性方程组.

非齐次线性方程组(*)和它所对应的齐次线性方程组(**)有着密切的关系，通常我们把与式(*)对应的齐次线性方程组(**)叫做式(*)的导出组.

(1) 设 $X=\eta_1$，$X=\eta_2$都是非齐次线性方程组(*)的解，则 $X=\eta_1-\eta_2$是其导出组式(**)的解.

(2) 设 $X=\eta^*$是非齐次线性方程组(*)的解， $X=\zeta$是其导出组（**）的解，则 $X=\zeta+\eta^*$是(*)的解.

定理3 若η^*是非齐次线性方程组(*)的一个解(通常称为特解)，则式(*)的任一解可表示成$\eta=\zeta+\eta^*$是其导出组(**)的一个解.

我们得到下面的推论 .

推论 3 非齐次线性方程组(**)有解时，它只有唯一解的充分必要条件是其导出组(**)只有零解.

四、熟练掌握用初等变换求线性方程组通解方法.

设
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (*)$$

是由m个方程组成的n元线性方程组，它的系数矩阵、未知数列向量和常数列向量分别是 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

于是线性方程组(*)可改 $AX=\beta$.记：

$$\tilde{A}=(A,\beta)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$\tilde{A}$称为(*)的增广矩阵.

如果 $\beta=0$，那么，式(*)表示一个齐次线性方程组；否则(*)表示一个非齐次线性方程组.

定理 3 如果线性方程组 $AX=\beta$有两个不同的解，那么它 一定有无穷多解.

线性方程组(*)的解只有三种可能：无解，唯一解，无穷多解.

下面介绍解线性方程组的一个规范方法 --- 高斯消去法，它是加减

消元法和代入消元法的推广和规范化.

定义 1　设 $AX_1=\beta_1$，$AX_2=\beta_2$是两个由m个方程组成的n元线性方程组,如果 $AX_1=\beta_1$的解都是 $AX_2=\beta_2$的解，$AX_2=\beta_2$的解都是$AX_1=\beta_1$的解,即线性方程组 $AX_1=\beta_1$, $AX_2=\beta_2$有相同的解,那么称它们为同解方程组,或称这两个方程组同解.

定理 4　如果线性方程组 $AX_1=\beta_1$的增广矩阵$\tilde{A}_1=(A,\beta_1)$ A= $(A_1\beta_1)$经过有限次行初等变换变成矩阵$\tilde{A}_2$, $\tilde{A}_2$作为增广矩阵对应于线性方程组$AX_1=\beta_1$那么,线性方程组 $AX_1=\beta_1$, $AX_2=\beta_2$是同解方程组.

用高斯消去法解线性方程组(*),实际上就是对增广矩阵 $\tilde{A}$进行矩阵的行初等变换,先把 $\tilde{A}$变为阶梯形矩阵,再继续施行行初等变换,使其变为简化阶梯形矩阵.前者就是消元过程,后者就是 回代过程.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

于是线性方程组(*)可改为$AX=\beta$.记:

$$\tilde{A}=(A,\beta)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$\tilde{A}$称为(*)的增广矩阵.

如果$\beta=0$,那么,式(*)表示一个齐次线性方程组;否则(*) 表示一个非齐次线性方程组.

定理 5　设线性方程组(*)的增广矩阵A经过行初等变换变为阶梯形矩阵（***）.

1、当$d_{r+1}\neq 0$,线性方程组(*)无解;

2、当$d_{r+1}=0$且$r=n$时,线性方程组(*)只有唯一解;

3、$d_{r+1}=0$ $r<n$时线性方程组(*)有无穷多解.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & c_{rr} & \cdots & c_{nr} & d_r \\ & & & & & & d_{r+1} \end{pmatrix} (***)$$

对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

由于 $x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0$,是它的一个解（通常称为零解）,所以齐次线性方程组的解总是存在的.问题是它会不会有非零解,从而有无穷多解.

推论 4　如果齐次线性方程组(**)的系数矩阵 A 的阶梯形中

非零行的数目 r 小于未知数的数目 n,那么它一定有非零解.

推论 5　如果齐次线性方程组(**)的方程数目 m 小于未知数的数目 n,那么它一定有非零解.

推论 6　如果齐次线性方程组(**)的未知数的数目 n 不超过

五、线性方程组理论是线性代数的重要内容之一.线性方程组的矩阵形式为 $Ax = b$,其中 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{n)})^T$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_{n)})^T$.

解线性方程组常用以下三种方法:

（1）用克莱姆法则.用克莱姆法则求解线性方程组有两个前提,一是方程个数等于未知量个数;二是系数行列式不等于零.实质上,克莱姆法则相当与使用逆矩阵方法求解线性方程组,即 $x = A^{-1}b$.它建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系,但在具体求解时,需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式工作量一般比较大,因此,克莱姆法则主要适用与理论推导.

（2）用消元法.对于具体地解线性方程组,消元法是一个最有效和最基本的方法.

但有时需直接从原方程组,来看它是否有解,及解的结构如何.这样消元法就不能用了.于是引入矩阵与向量的语言.把方程组写成矩阵形式,通过研究系解线性方程组数矩阵与增广矩阵来解决上述问题.利用

矩阵的语言,我们还有如下的方法.

（3）利用等价标准形

设 A 为秩为 r 的 $m\times n$ 的矩阵,则对 A 作初等行变换总可以化为矩阵 B,使得矩阵 B 的后 $m-r$ 行全为零,且中 B 有 r 个互不相同的单位列向量,称为的行等价标准形.

利用等价标准形可以解线性方程组.以 A 为增广矩阵的性方程组与以 A 的等价标准形 B 为增广矩阵的线性方程组是同解的.将 B 中单位列向量对应的未知量视为非自由未知量,而其余的对应的未知量视为自由未知量,最后一列视为常数项,即得线性方程组的解.

六、克莱姆（*Gramer*） 法则

由 m 个方程组成的 n 元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ (*)可写成 $AX=\beta$ 或写成 $\sum_{i}^{n}a_{ij}=b_i$, $i=1,2,\cdots,m$

定理 5 （克莱姆（*Gramer*）法则）对于线性方程组(*),如果系数矩阵 A 的行列式 $|A|\neq 0$,那么,此方程组有唯一解 $x_j=\dfrac{|A_j|}{|A|}$, $j=1,2,\cdots,n$

其中,A_j 是三元一次方程组常数列向量 β 来代替系数矩阵 A 的第 j 列后得到的矩阵.

推论 7 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \qquad (**)$$

的系数矩阵 A 的行列式 $|A|\neq 0$,那么方程组只有零解.

推论 8 齐次线性方程组(**)有非零解的充分必要条件是系数矩阵 A 的行列式 $|A|=0$.