线性代数学习指导

第五章　相似矩阵与二次型

本章重点、难点： 矩阵的特征值与特征向量、矩阵的可对角化及二次型的标准形和正定二次型。

本章教学要求： 掌握线性无关向量组标准正交化的施密特（Schimidt）方法、求方阵的特征值、特征向量的方法，会求一个正交阵使得实对称阵化为对角阵、用正交变换将二次型化为标准形以及拉格朗日配方法化二次型为标准形的方法，判断二次型及其系数阵的正定性。

一、　知识考点精要

向量内积及运算性质　向量长度（或范数）　单位向量　正交向量及正交向量组　向量空间的正交基及规范正交基　无关向量组的施密特（Schimidt）正交化　正交矩阵　正交变换　方阵的特征值与特征向量　相似矩阵与相似变换　方阵的对角化　二次型及标准形　二次型的矩阵　二次型的秩　正定（负定）二次型　正定矩阵

（一）　向量内积及运算性质

1、 **向量的内积**　我们知道在空间 R^3 中，关于向量的长度、夹角等概念都可以通过向量的数量积来表达。在高等数学中所学的两个向量的数量积就是内积的表达形式。在线性代数中，依照 R^3 中内积的一些特征，将它推广到一般线性空间中去。

定义：设有 n 维向量 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$，

令 $[X,Y]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$，$[X,Y]$ 称为向量 X 与 Y 的内积。

特别提示：（1）内积是向量的一种运算

（2）当 X 与 Y 都是列向量时 $[X,Y]=X^TY$

（3）零向量与任意向量的内积都是零

（4）[X，X]= $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$

2、内积运算性质：

（1）[X，Y]=[Y，X]

（2）$[\lambda X,Y]=\lambda[X,Y]$

（3）[X+Z，Y]=[X，Y]+[Z，Y]

（二） 向量长度及单位向量

1、向量的长度 ： 由于 n 维向量没有 3 维向量那样直观的长度与角度的概念，因此只能按数量积的直角坐标计算公式来推广。

定义：令 $\|X\|=\sqrt{[X,Y]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$，称 $\|X\|$为 n 维向量 X 的长度（范数）

2、向量长度的性质：

（1）$\|X\|\geq 0$， $\|X\|$=0 的充要条件是 X=0 （零向量）

（2）对任意非零常数 $\lambda\in R$, $\|\lambda x\|=|\lambda|\|X\|$

（3）$\|X+Y\|\leq\|X\|+\|Y\|$

（4）[X，X]=$\|X\|^2$

（5）对任意向量α,β，都有 $|\alpha^T\beta|\leq\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$

3、单位向量：

当$\|X\|$=1 时，称 X 为单位向量。显然对任意非零向量 Y 都有$\|Y\|\neq 0$

那么 $\dfrac{Y}{\|Y\|}$ 就是一个单位向量。

4、向量的夹角：当$\|Y\|\neq 0$，$\|X\|\neq 0$时，称$\theta=\arccos\dfrac{[X,Y]}{\|X\|\cdot\|Y\|}$为向量 X 与 Y 的夹角。

（三） 正交向量及正交向量组

1、 **两向量正交：** 如果 n 维向量 X 与 Y 的内积 $[X,Y]$=0 ，称向量 X 与 Y 正交

2、 **正交向量组**：设有 n 维非零向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 如果

$[\alpha_i,\alpha_j]=0$, $i\neq j$ $i,j=1,2\cdots r$ 则称$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$为正交向量组。

特别提示：（1）零向量与任意向量都正交

（2）正交向量组中不含零向量

（3）两向量 X 与 Y 正交的充要条件是 X 与 Y 的内积等于零

（四）　向量空间的正交基和规范正交基

在上一章中，我们讲到了向量空间 V 的一个最大无关组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 就称为 V 的一个基，当 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 是正交向量组时，则称 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 是 V 的一个正交基。如果正交基 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 中每一个向量都是单位向量，就称 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 是 V 的规范正交基。

特别提示：(1) 单位坐标向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$ 是 R^n 的一个规范正交基

(2) 若 $e_1,e_2\cdots e_r$ 是 V 的一个规范正交基，那么 V 中任一向量 α 由 $e_1,e_2\cdots e_r$ 表示的表达式为 $\alpha=[\alpha,e_1]e_1+[\alpha,e_2]e_2+\cdots[\alpha,e_r]e_r$

例： 已知 $e_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$， $e_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ 是 R^2 的一个规范正交基， $\alpha=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，

且有 $[\alpha，e_1]=\frac{1}{\sqrt{2}}$， $[\alpha,e_2]=\frac{3}{\sqrt{2}}$ ，则 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}+\frac{3}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

（五）　无关向量组的施密特（**Schimidt**）正交化

1、 定理：若 n 维向量 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_r$ 是正交向量组，则 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_r$ 线性无关.

特别提示：线性无关的向量组不一定正交。

例：已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$， $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$， 有 α_1,α_2 线性无关， 但 $[\alpha_1,\alpha_2]=1\neq 0$ 因而 α_1,α_2 不正交。

2、已知 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 是 n 维向量组 V 中的一个基，则一定可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 生成正交基 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_r$，并使这两个向量组可以互相线性表示。我们把由一个线性无关的向量组生成满足上述性质的正交向量组的过程称为无关向量组的施密特（Schimidt）正交化过程（或称把 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 这个基规范正交化）。

对向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$规范正交化步骤如下：

取 $\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\beta_1,\alpha_2]}{\|\beta_1\|^2}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\beta_1,\alpha_3]}{\|\beta_1\|^2}\beta_1-\frac{[\beta_2,\alpha_3]}{\|\beta_2\|^2}\beta_2$$

。。。 。。。

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{[\beta_1,\alpha_r]}{\|\beta_1\|^2}\beta_1-\frac{[\beta_2,\alpha_r]}{\|\beta_2\|^2}\beta_2-\cdots-\frac{[\beta_{r-1},\alpha_r]}{\|\beta_{r-1}\|^2}\beta_{r-1}$$

容易验证$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_r$两两正交，且$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_r$与$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$等价。

此时$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_r$是一个正交基。如果再将$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_r$单位化，即：

令$e_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$， $e_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\cdots,e_r=\dfrac{\beta_r}{\|\beta_r\|}$， 则$e_1,e_2\cdots e_r$就是规范正交基。

（六） 正交矩阵与正交变换

1、 正交矩阵定义：如果 n 阶矩阵 A 满足 $A^TA=E$，那么称 A 为正交矩阵。

正交矩阵有下列性质：

(1) 若 A 为正交矩阵，则 A 一定可逆其逆矩阵也是正交矩阵，有$A^{-1}=A^T$。

(2) (2) 若 A 为正交矩阵，则|A|=±1。因为$|A^TA|=|A^T|\cdot|A|=|A|^2=|E|=1$。

(3) 若 A 与 B 都是正交矩阵，则它们的积 AB 也是正交矩阵。

(4) A 为正交矩阵的充要条件是其行（列）向量组是规范正交向量组。

即正交矩阵 A 的 n 个列（行）向量构成向量空间R^n的一个规范正交基

2、正交变换 定义：若 P 为正交矩阵，则线性变换$y=Px$称为正交变换。

设$y=Px$为正交变换，则有$\|y\|=\sqrt{y^Ty}=\sqrt{x^TP^TPx}=\sqrt{x^Tx}=\|x\|$

按$\|x\|$表示向量的长度，相当于线段的长度。$\|y\|=\|x\|$说明经正交变换线段长度保持不变，这是正交变换的优良性。

（七） 方阵的特征值与特征向量

方阵的特征值与特征向量是线性代数中比较困难但又十分重要的内容，它们在经济理论以及工程技术中如振动与稳定等问题，常可归结为求一个方阵的特征值和特征向量的问题。数学中诸如方阵的对角化及解微分方程组等问题，也都要用到特征值的理论。

1、 **定义**：设 A 是 n 阶方阵，如果数 λ 和 n 维非零列向量 X 使关系式

$$AX=\lambda X \qquad (\text{i})$$

成立，那么这样的数 λ 称为方阵 A 的特征值，非零向量 X 称为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量。

我们将（i）改写为 $AX-\lambda X=(A-\lambda E)X=0$ 得 n 元线性齐次方程组：

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0\end{cases} \qquad (\text{ii})$$

其中 A=$\begin{pmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{pmatrix}$，我们知道当|A|$\neq 0$时方程组（ii）有非零解。

令 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0$，称 $f(\lambda)$ 为 A 的特征多项式。

显然，$f(\lambda)$=0 是一个关于 λ 的 n 次多项式且在复数范围内恒有 n 个根：$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$（重根按重数计算）。因此，$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$ 就是方阵 A 的特征值（根）。将 λ_i， $i=1,2\ldots$ 代入（ii）式则 n 元线性齐次方程组的解即为 A 的特征值 λ_i， $i=1,2\ldots$ 所对应的特征向量

2、性质：设 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$ 是方阵 A 的特征值（重根按重数计算）

(1) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$=|A| 显然：|A|=0 $\Leftrightarrow$ A 有一个特征值为零。

(2) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

(3) n 阶方阵 A 与它的转置矩阵 A^T 有相同的特征值。因为 由 $(A-\lambda E)^T=A^T-\lambda E$

得到 $|A^T-\lambda E|=|A-\lambda E|^T=|A-\lambda E|$

(4) 设 n 阶矩阵 A=(a_{ij})，如果 $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1 \quad i=1,2,\cdots,n$ （A 的各列之和小于 1）

或$\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|<1 \quad j=1,2,\cdots,n$ （A 的行之和小于 1）有一个成立，则矩阵 A 的所有特征值的模 $|\lambda_k|<1 \quad k=1,2,\cdots,n$

(5) 若 X 是对应于λ的特征向量，则对 R 中任意非零常数μ，则μX 也是λ对应的特征向量。因为 A（μX）= $\mu AX=\lambda$（μX）

(6) 若 X_1, X_2 是特征值λ对应的两个不同的特征向量，μ_1,μ_2 是 R 中任意非零常数，则 $\mu_1 X_1+\mu_2 X_2$ 仍是λ对应的特征向量。

综合（5），（6）得到结论：如果 $X_1, X_2\cdots X_S$ 都是 A 的特征值λ所对应的特征向量，$\mu_1,\mu_2\cdots\mu_s$ 是 R 中的任意非零常数，那么 $\mu_1 X_1+\mu_2 X_2+\cdots\mu_S X_S$ 也是λ所对应的特征向量。

(7) 方阵 A 的不同特征值对应的特征向量线性无关。即：如果 $X_1, X_2\cdots X_s$ 分别是 A 的 S 个不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_s$ 所对应的特征向量，则向量组 $X_1, X_2\cdots X_S$ 线性无关。

(8) 如果 A 为实对称矩阵，那么 A 的所有特征值一定是实数

(9) 若 λ 是方阵 A 的特征值，则 λ^k是A^k 的特征值；$\varphi(\lambda)$是φ（A）的特征值。

（其中φ（λ）$=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_m\lambda^m,\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$）

(10) 当 A 可逆时，$\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值。

3、特别提示：

(1) 计算 n 阶方阵 A 的特征值与特征向量的步骤：

（Ⅰ）计算特征多项式 $f(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$

（Ⅱ）求 $f(\lambda)$=0 的根：$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_s$ （设有 S 个不同的根）

（III）对每一个 λ_i　$i=1,2,\cdots s$ 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda_i)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda_i)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda_i)x_n=0\end{cases}$$ 的一个基础解系。　　（iii）

那么 A 的特征值就是 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_s$，A 的对应 λ_i　$i=1,2,\cdots,s$ 的特征向量就是方程组（iii）的非零解向量 X。

（2）由特征值 λ_i　$i=1,2,\cdots s$ 对应的特征向量的求法可知，齐次线性方程组（iii）的基础解系中的每一个非零解向量 X 都是 λ_i　$i=1,2,\cdots s$ 所对应的一个特征向量，而基础解系的线性组合就是 λ_i　$i=1,2,\cdots s$ 对应的所有特征向量。

（八）　相似矩阵与相似变换及方阵的对角化

1、　相似矩阵、合同矩阵与相似变换

（1）定义：设 A 与 B 都是 n 阶方阵，若有可逆矩阵 P，使

$$P^{-1}AP=B,$$

则称 B 是 A 的相似矩阵，或说 A 与 B 相似，记为 $A\sim B$ 。

对 A 进行运算 $P^{-1}AP$ 称为 A 进行相似变换。

(2) 定义：设 A 与 B 都是 n 阶方阵，若有可逆矩阵 P，使

$$P^TAP=B$$

则称矩阵 A 与 B 合同。

特别提示：A 与 B 合同 $\Rightarrow$ A 与 B 相似，反之不一定。

2、相似矩阵性质：

（1）　A ~ A （自反性）　因为 $E^{-1}AE=A$

（2）　若 A ~ B 则 B ~ A （对称性）因为 P 可逆，那么 P^{-1} 也可逆，且 $(P^{-1})^{-1}=P$

由 $P^{-1}AP=B$ 得到 $(P^{-1})^{-1}BP^{-1}=A$，所以 B ~ A 。

（3）　若 A ~ B，B ~ C 则 A ~ C （传递性）。

（4）　若 A ~ B，则 A 与 B 有相同的特征值。因为

$$|B-\lambda E|=|P^{-1}AP-\lambda E|=|P^{-1}AP-P^{-1}\lambda EP|=|P^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|P|=$$

$=|A-\lambda E|$，故 A 与 B 有相同的特征多项式所以有相同的特征值。

（5） 若 A ~ B 则 |A|=|B|。（相似矩阵的行列式值相等）

因为 $|B|=|P^{-1}AP|=|P^{-1}|\cdot|A|\cdot|P|=|A|$

（6） 若 A ~ B 则 $R(A)=R(B)$（相似矩阵的秩相同）

（7） 若 A ~ B 则 A 与 B 或都可逆或都不可逆。当 A 与 B 都可逆时有 $A^{-1}\sim B^{-1}$

由性质（5）|A|=|B| 以及方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$ 知，A 与 B 的可逆性是一致的。

而 $B^{-1}=(P^{-1}AP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$，所以 $A^{-1}\sim B^{-1}$。

（8） 若 n 阶方阵 A 与对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相似，则 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$ 既是 A 的 n 个特征值。

（9）若 A ~ B，则 $A^m=PB^mP^{-1}$。特别地，当 B 为对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 时

有 $A^m=P\begin{pmatrix}\lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m\end{pmatrix}P^{-1}$ 成立。

3、方阵 A 的对角化

相似的矩阵具有许多共同的性质。因此，对于 n 阶矩阵 A，我们希望在与 A 相似的矩阵中寻求一个较简单的矩阵，在研究 A 的性质时，只需先研究这一较简单的矩阵的同类性质。而对 n 阶方阵 A，寻求相似变换矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵，这就称为把方阵 A 对角化。

任意方阵的对角化：

（1）方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量。

（2）如果 A 有 n 个不同的特征值，则 A 一定可以对角化。

（3）方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ n 元齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)X=0$ 的基础解系中线性无关解向量的个数等于 λ_i 的重数。

对称矩阵的对角化:

(1) 对称矩阵的特征值为实数

(2) 设λ_1,λ_2是对称矩阵 A 的特征值，P_1,P_2是对应的特征向量.如果$\lambda_1 \neq \lambda_2$,则非零向量P_1,P_2正交.

(3) 设λ是对称矩阵 A 的 m 重特征值,那么 n 元齐次线性方程组$(A-\lambda_i E)X=0$的基础解系中正好有 m 个线性无关的特征向量.

(4) 设 A 为 n 阶对称矩阵，则必有正交矩阵 P，使得$P^{-1}AP=\Lambda$，其中Λ是以 A 的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵。

4、**特别提示：**

（1）方阵 A 的特征值λ所对应的特征向量 X 一定是非零向量。

（2） 如果λ是方阵 A 的特征单根，那么方程组$(A-\lambda E)X=0$的基础解系只有一个非零解向量；如果λ是方阵 A 的 m 重特征值，那么方程组$(A-\lambda E)X=0$基础解系里的非零解向量的个数小于等于 m.

（3） 不是任意矩阵都能与对角矩阵相似。当λ是 A 的 m 重特征值，而$(A-\lambda E)X=0$的基础解系里的解向量正好有 m 个时， A 则可对角化。

（4） 由（3）可知不是任意矩阵都能与对角矩阵相似，但任意矩阵都可以和约当阵相似。即：对任意 n 阶方阵 A，都存在可逆矩阵 T，使$T^{-1}AT=J$，J 为约当形矩阵。

约当形阵定义：称$J_i=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$为约当块。

如果一个分块对角阵的所有子块都是约当块，即$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_S \end{pmatrix}$

其中$J_i \quad i=1,2,\cdots,s$ 都是约当块，则称 J 为约当形矩阵。

例：$\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&4&0&0&0\\0&0&0&2&1&0\\0&0&0&0&2&1\\0&0&0&0&0&2\end{pmatrix}$ 都是约当形矩阵。

而对角阵可以看成每个约当块都为一阶的约当形矩阵。

5、**判断 n 阶方阵 A 可对角化的步骤如下：**

（1）计算特征多项式 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}$

（2）求 $f(\lambda)$=0 的根：$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_s$（设有 S 个不同的根）

（3）分别将 $\lambda_i, i=1,2,\cdots,s$ 代入齐次方程组 $(A-\lambda_i E)X=0$ 求解。

（4）当 $s=n$ 时, A 有 n 个无关的特征向量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，那么 A 可对角化

令 P=$\left(X_1X_2\cdots X_n\right)$，显然 P 为可逆矩阵，且有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$ 成立。这里要注意的是 X_i 是 $\lambda_i, i=1,2,\cdots,n$

所对应的特性向量。

如果用无关向量组的施密特（Schimidt）正交化方法将 $X_1,X_2,\cdots,X_n$

化为规范正交向量组 $P_1,P_2,\cdots P_n$，再令 P=$(P_1P_2\cdots P_n)$ 显然 P 为正交矩阵，仍有：

$$P^{-1}AP=P^TAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$ 成立。

（5） 当 $s<n$ 时，设 λ_i 是 A 的 m 重特征值，而方程组 $(A-\lambda_i E)X=0$ 的基础解系里

正好有 m 个无关向量，则 A 仍有 n 个无关的特征向量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$， A 可对

角化。而求可逆阵或正交阵 P，使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 的方法同（4）。

（6） 当 $s<n$ 时，设 λ_i 是 A 的 m 重特征值，而方程组 $(A-\lambda_i E)X=0$ 的基础解系里无关向量的个数小于 m，则 A 不能与对角矩阵相似，但一定可以和前面提到的约当形矩阵相似（至于如何找约当形矩阵这里就不再叙述）

（九） 二次型及标准形、二次型的矩阵、二次型的秩 正定二次型

1、二次型定义：只含有二次项的 n 元多项式

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n)=\sum_{i\le j}a_{ij}x_ix_j \quad \text{称为 } x_1,x_2,\ldots x_n \text{ 的一个二次型。}$$

2、二次型的矩阵式及秩：令：A= $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ ， X= $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

则得到二次型的矩阵表达式： $f=X^TAX$

特别提示：（1） 我们把矩阵 A 秩 $R(A)=r$ 称为二次型 $f=X^TAX$ 的秩。

（2） 一个对称矩阵对应一个二次型，即二次型的矩阵式唯一。

3、二次型的标准形： 称 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ry_r^2$ 为二次型的标准形。

其中：（1） $R(A)=r$ （2） $r\le n$ （3） $\lambda_i\ne 0$ $i=1,2,\cdots r$

4、正定二次型：

（1）定义： 对二次型 $f=X^TAX$ 如果对任意的 $X\ne 0$ 都有 $f=X^TAX>0$

称二次型 $f=X^TAX$ 为正定二次型，称 A 是正定的。若 $X\ne 0$ 都有 $f=X^TAX<0$

称二次型 $f=X^TAX$ 为负定二次型，称 A 是负定的。

（2）判断二次型正（负、不定）的方法：

- 二次型为正定的充要条件是其标准形的 n 个系数全为正，即它的正惯性指数为 n；二次型为负定的充要条件是其标准形的 n 个系数全为负。否则为不定
- 如果二次型的矩阵 A 的 n 个特征值都大于零，则二次型为正定二次型。
  如果二次型的矩阵 A 的 n 个特征值都小于零，则二次型为负定二次型。

- 已知 A 为二次型对应的对称矩阵 ，如果 A 满足

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \cdots \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$$ 则二次型为正定。

$$a_{11}<0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}<0,\quad (-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1r} & a_{2r} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}>0$$

（$r=1,2,\cdots n$）奇数阶主子式小于零，偶数阶主子式大于零。

5、化二次型为标准形方法：

（1）**用正交变换化二次型为标准形**

- 如果二次型矩阵 A 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$，其对应的 n 个特征向量 $X_1,X_2\cdots X_n$ 是正交向量组，再将 $X_1,X_2\cdots X_n$ 单位化，

$$P_1=\frac{X_1}{\|X\|},P_2=\frac{X_2}{\|X_2\|},\cdots P_n=\frac{X_n}{\|X_n\|}$$ ，再 令 P=$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{pmatrix}$

则二次型标准形：$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$

所用的正交变换：X=PY

- 当二次型矩阵 A 的特征值小于 n 时，首先对 A 的特征重根对应的线性无关的特征向量用施密特（Schimidt）正交化得到正交规范向量组，再对单根的特征向量单位化，这样又得到一个正交矩阵 P=$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{pmatrix}$，得

二次型标准形：$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_r y_r^2$ （$r<n$）

所用的正交变换：X=PY

（2）**用配方法化二次形为标准形（也称拉格朗日配方法）**

用配方法化二次型为标准形的要点是：利用和的平方公式与两数平方差的公式逐步消去非平方项。如果二次型中有含 x_i 平方项，则把与 x_i 有关的所有项集中配成完全平方项，而后面剩余的项不再含 x_i，然后再对剩余的项继续使用上面的方法直到完全消去非平方项；如果二次型中没有平方项，对项 $x_i x_j$ 可令 $x_i=y_i-y_j$， $x_j=y_i+y_j$，$x_k=y_k$ 代入到二次型中则会出现 y_i 的平方项，再按上述方法完全消去非平方项。

例 1：化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3-2x_3^2$ 为标准形，并求出所用变换矩阵 C 。

解　先将含 x_1 的项集中，配成一个完全平方项，然后再集中含 x_2 的项，依次类推最后完全消去非平方项。即

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3)+2x_2x_3+x_2^2-2x_3^2=$$

$$=(x_1-2x_2+x_3)^2-3x_2^2+6x_2x_3-3x_3^2=$$

$$=\ (x_1-2x_2+x_3)^2-3(x_2-x_3)^2$$

作变换：$\begin{cases} y_1=x_1-2x_2+x_3 \\ y_2=x_2-x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，　$\Rightarrow$　$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

则二次型标准形： $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-3y_2^2$

所用变换矩阵 C= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。注：此时 C=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$只是可逆矩阵而非正定。

例 2：化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-3x_2x_3$ 为标准形，并求出所用变换矩阵 C 。

解　因为二次型 中没有平方项，所以先作一个可逆变换，使其出现平方项，根据平方差公式，令

$$\begin{cases} x_1=y_1-y_2 \\ x_2=y_1+y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$ 代入到二次型中，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-y_2^2-2y_1y_3+4y_2y_3$$

把含 y_1 的项配成完全平方项，再把含 y_2 的项配成完全平方项，得到

$$f(x_1,x_2,x_3)=(y_1-y_3)^2-y_3^2-y_2^2+4x_2x_3=$$

$$=\ (y_1-y_2)^2-(y_2-2y_3)+3y_3^2$$

令　$\begin{cases} z_1=y_1-y_2 \\ z_2=y_2-2y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

于是得到二次型的标准形　$f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2-z_2^2+3z_3^2$

所用可逆变换　X= $\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&-1&-1\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$=CZ

(3)　应用初等变换法化二次型为标准形

先看例题：将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3+2x_2^2+x_3^2$ 化为标准形

解　二次型对应矩阵　$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&1\end{pmatrix}$，下面对 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}$ 做初等变换

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&1\\&\cdots\cdots&\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&0\\&\cdots\cdots&\\1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\\&\cdots\cdots&\\1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&-1\\&\cdots\cdots&\\1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r\ -r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\&\cdots\cdots&0\\1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$　令 C= $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 及 X=CY

我们得到二次型的标准形：

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=(CY)^TACY=Y^T(C^TAC)Y=Y^T\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}Y=$$

$$=\ y_1^2+y_2^2-y_3^2$$

特别提示：使用此方法有一个规定：在对 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}$ 的列进行一次初等列变换后则必须马上再对它实施一次相同的行的初等变换　；我们的目的就是把矩阵 A 化成对角阵。一旦 A 经过初等变换化成了对角阵，而单位阵 E 经过初等变换后得到的矩阵就是化二次型为标准型所用的

可逆变换矩阵 C。

另：也可把 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ 写成 $\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}$ 进行初等变换，但对 $\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}$ 是先进行行变换再进行一次相同的列变换，得到的结果是一致的。

6、几点结论

（1） 任意实二次型 $f = X^T AX$ 都可以经过一个正交变换化为标准形

（2） 任意实二次型 $f = X^T AX$ 都可以经过一个可逆变换化为标准形

即：任意对称矩阵都与一个对角阵合同。

（3） 设用两种方法化二次型为标准形分别为

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2$$

$$f = \kappa_1 z_1^2 + \kappa_2 z_2^2 + \cdots + \kappa_s z_s^2$$

则有： $r = s$ ；$\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_r$ 与 $\kappa_1, \kappa_2 \cdots \kappa_s$ 中正数与负数的个数一致。

（4） 二次型的正定（负定）的判定，是在二次型的标准形中的惯性指数为 n 时判定，如果其惯性指数小于 n 则为不定二次型。

7、关于矩阵正定、负定的应用

利用二次型矩阵的正定性概念，可以给出多元微积分中关于多元函数极值的判定的一个充分条件： 设 $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots x_n^0)$ 是 n 元函数 $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 的驻点，且 $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 在 x_0 的某个邻域里有一阶、二阶连续偏导数。

令 $H(x_0) = \begin{pmatrix} f_{11}(x_0) & f_{12}(x_0) & \cdots & f_{1n}(x_0) \\ f_{12}(x_0) & f_{22}(x_0) & \cdots & f_{2n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{1n}(x_0) & f_{2n}(x_0) & \cdots & f_{nn}(x_0) \end{pmatrix}$ 其中 $f_{ij}(x_0)$ 是函数关于自变量 x_i 与 x_j 在点 $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots x_n^0)$ 的二阶偏导。$i, j = 1,2,\cdots n$

称 $H(x_0)$ 为函数在 $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 在 $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots x_n^0)$ 点的 n 阶赫斯（Hess）矩阵

再令 $|H_k(x_0)|$ 是 $H(x_0)$ 的 k 阶主子式，$k = 1,2,\cdots n$

我们有以下判别法：

（1） 当 $H(x_0)$ 正定矩阵时，即 $|H_k(x_0)| > 0, k = 1,2,\cdots n$ ，则 $f(x_0)$ 是函数的极小值

（2） 当 $H(x_0)$ 负定矩阵时，$(-1)^k |H_k(x_0)| > 0, k = 1,2,\cdots n$ ，则 $f(x_0)$ 是函数的极大值

（3）当 $H(x_0)$ 是不定矩阵时， $f(x_0)$ 非极值。

例：求函数 $f(x,y,z)=x^3+3xy+3xz+3yz+y^3+z^3$ 的极值

解： 由 $\begin{cases} f_x=3x^2+3y+3z=0 \\ f_y=3y^2+3x+3z=0 \\ f_z=3z^2+2x+2y=0 \end{cases}$ 的到驻点 $P_1(0,0,0)$， $P_2(-2,-2,-2)$

$f_{xx}=6x \quad f_{xy}=3 \quad f_{xz}=3$

$f_{yx}=3 \quad f_{yy}=6y \quad f_{yz}=3$

$f_{zx}=3 \quad f_{zy}=3 \quad f_{zz}=3$

则得到赫斯矩阵 $H(P_1)=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$， $H(P_2)=\begin{pmatrix} -12 & 3 & 3 \\ 3 & -12 & 3 \\ 3 & 3 & -12 \end{pmatrix}$

由 $H_1(P_1)=0$ 知 $H(P_1)$ 是不定的，故（0，0，0）点不是函数的极值点。

由 $|H_1(P_2)|=-12<0$， $|H_2(P_2)|=135>0$， $\left|H_3(P_2)\right|=-1350<0$ 知 $H(P_2)$

负定矩阵，所以 $f(-2,-2,-2)=12$ 是函数的极大值。

二　经典例题

例一：

求三阶矩阵

A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 特征值与特征向量。

解：A 的特征多项式为

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4 \ =0$$

又 $\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+4)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

于是得到 A 的特征值为 $\lambda_1=1$， $\lambda_2=\lambda_3=2$。

将 $\lambda_1=1$ 代入到齐次方程组 $(A-\lambda E)X=0$，得

$$(A-\lambda E)X=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 对系数矩阵 A 进行初等行变换得

$$\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$ 得到方程组的基础解系 $P_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，

则 P_1 即为 $\lambda_1=1$ 的一个特征向量，而方程组的通解 k_1P_1 即为 $\lambda_1=1$ 对应的所有特征向量。

再将 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 代入到齐次方程组 $(A-\lambda E)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 得到方程组的基础解系 $P_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

则 P_2 和 P_3 都是 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的特征向量，而方程组的通解 $k_2P_2+k_3P_3$ 是 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的所有特征向量。

特别提示：矩阵 A 的特征值 λ 所对应的特征向量不唯一。

例二：

求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&2&1&2\\2&-1&-2&2&0\\2&-2&-1&1&4\\0&0&0&1&3\\0&0&0&2&2\end{pmatrix}$$ 的特征值。

解：先将矩阵 A 分解为分块矩阵

$$A=\left(\begin{array}{ccc:cc}-1&2&2&1&2\\2&-1&-2&2&0\\2&-2&-1&1&4\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&1&3\\0&0&0&2&2\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\0&A_3\end{pmatrix}$$

令矩阵 A 的特征多项式 $\left|A-\lambda E_5\right|=\begin{vmatrix}A_1-\lambda E_3&A_2\\0&A_3-\lambda E_2\end{vmatrix}=\left|A_1-\lambda E_3\right|\cdot\left|A_3-\lambda E_2\right|=0$

由 $\left|A_1-\lambda E_3\right|=0$ 得到 A_1 的特征值 $\lambda_1=-5$，$\lambda_2=\lambda_3=1$

由 $\left|A_3-\lambda E_2\right|=0$ 得到 A_2 的特征值 $\lambda_4=4$，$\lambda_5=-1$

故所求矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-5$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，$\lambda_4=4$，$\lambda_5=-1$。

特别提示：利用分块矩阵，将求高阶矩阵的特征值问题转化为求低阶矩阵的特征值。

例三：

填空：已知 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$，对应的特征向量分别为 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 则

（1） kA 的特征值为______________，对应的特征向量为__________________。

（2） A^m 的特征值为______________，对应的特征向量为__________________。

(3) A 可逆时，A^{-1} 特征值为______________，对应的特征向量为_______________。

（4）A 可逆时，A^* 特征值为______________，对应的特征向量为_______________。

（5）P 为可逆矩阵，$P^{-1}AP$ 特征值为__________，对应的特征向量为______________。

（6）设多项式 $f(x)=c_0x^m+c_1x^{m-1}+\cdots+c_{m-1}x+c_m$，则矩阵多项式

$f(A)=c_0A^m+c_1A^{m-1}+\cdots+c_{m-1}A+c_mE$ 的特征值为______________，对应的特征向量为_______________。

（7） A^T 的特征值为______________。

解：(1) 由题设知 $AX_i=\lambda_iX_i\,(i=1,2,\cdots n)$,于是由 $(kA)X_i=k(AX_i)=(k\lambda_i)X_i$ 得，kA 的特征值为 $k\lambda_1,k\lambda_2,\cdots k\lambda_n$，特征向量是 $X_1,X_2,\cdots X_n$。

（2） 题设知 $AX_i=\lambda_iX_i$ （$i=1,2,\cdots n$），又由 $A^mX_i=\lambda_iA^{m-1}X_i=\cdots=\lambda_i^mX_i$ 得，A^m 的特征值是 $\lambda_1^m,\lambda_2^m,\cdots,\lambda_n^m$，对应的特征向量是 $X_1,X_2,\cdots X_n$

（3）题设 $AX_i=\lambda_iX_i$ （$i=1,2,\cdots n$），及 A 可逆，即 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\neq0$，

知 $\lambda_i\neq0$ （$i=1,2,\cdots n$），从而的到 $A^{-1}X_i=\dfrac{1}{\lambda_i}X_i$，所以 A^{-1} 的特征值是

$\dfrac{1}{\lambda_1},\dfrac{1}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{1}{\lambda_n}$，所对应的特征向量是 $X_1,X_2,\cdots X_n$。

（4） 意到 $A^*=|A|\cdot A^{-1}$，结合（1），（3）可得 A^* 的特征值是 $\dfrac{|A|}{\lambda_1},\dfrac{|A|}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{|A|}{\lambda_n}$，对应的特征向量是 $X_1,X_2,\cdots X_n$

（5） 由 $AX_i=\lambda_i X_i$ （$i=1,2,\cdots n$），得 $AX_i=APP^{-1}X_i=\lambda_i X_i$，再左乘 P^{-1} 有

$\left(P^{-1}AP\right)P^{-1}X_i=P^{-1}\lambda_i X_i=\lambda_i(P^{-1}X_i)$，所以 $P^{-1}AP$ 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$

所对应的特征向量是 $P^{-1}X_1,P^{-1}X_2,\cdots,P^{-1}X_n$。

（6） 结合（1）、（2）可得，矩阵多项式的特征值为 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$，特征向量

$X_1,X_2,\cdots X_n$。

（7） 由 $\left|A^T-\lambda E\right|=\left|(A-\lambda E)^T\right|=\left|A-\lambda E\right|$，所以 A^T 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$。

例四：

已知向量 $X=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$ 是矩阵 A=$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量，试求常数 k 的值。

解：矩阵 A 的特征多项式

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

所以，A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$，由于 X 是 A^{-1} 的特征向量，则它也是 A 的特征向量。由 $AX=X$，或 $AX=4X$ 解得 $k=-2$， 或 $k=1$ 。

例五：设 3 阶矩阵 A 的特征值分别为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=3$，对应的特征向量依次为

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad X_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}，又向量 Y=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$$

（1） 将 Y 用 X_1， X_2， X_3 线性表示

（2） 求 A^nY （n 为自然数）

解：（1） 设 $Y=k_1X_1+k_2X_2+k_3X_3$，得方程组

$$\begin{cases}k_1+k_2=3\\-k_1-k_2+k_3=-2\\k_1-k_2=0\end{cases}$$ 对方程组的增广矩阵进行行的初等变换

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&3\\-1&-1&1&-2\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&0&1&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&0&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

得解为 $k_1=2$， $k_2=1$， $k_3=1$， 故 $Y=2X_1+X_2+X_3$

（2） 方法一：利用 $AX_i=\lambda_i X_i$， $i=1,2,3$ ，有 $A^nY=A^n(2X_1+X_2+X_3)=$

$$=2A^nX_1+A^nX_2+X_3=2\lambda_1^nX_1+\lambda_2^nX_2+\lambda_3^nX_3=\begin{pmatrix}2(-1)^n+1\\2(-1)^{n+1}+3^n-1\\1-3^n\end{pmatrix}$$

方法二：令 $P=\begin{pmatrix}X_1 & X_2 & X_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ ，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}，于是有\quad A^n=P\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&1^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

从而 $A^nY=P\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&1^n&\\0&0&3^n\end{pmatrix}P^{-1}Y=\begin{pmatrix}2(-1)^n+1\\2(-1)^{n+1}+3^n-1\\1-3^n\end{pmatrix}$

例六：

已知 3 阶矩阵 A 的特征值分别为 1，-1，2。设矩阵 $B=A^3-5A^2$

试计算：(1) |B|　　(2) |A-5E|

解：(1) 设 λ 是 A 的一个特征值，由 $B=A^3-5A^2$ 知，B 的特征值为 $\lambda^5-5\lambda^2$，即

B 的特征值分别为 -4， -6， -12. 于是 |B|=-288 。

(2) 因为矩阵 A 的特征值分别为 1，-1，2 ，

所以 $|A-\lambda E|=(1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2)$，令 $\lambda=5$ 代入到 A 的特征方程中，得

$|A-5E|=(1-5)(5+1)(5-2)=-72$ 。

例七：将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=6x_1^2+3x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$ 化为标准形并判断其正定性 。

解 ：**方法一** （用正交变换法化二次型为标准形）

已知二次型所对应的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}6&2&4\\2&3&2\\4&2&6\end{pmatrix}$$

A 的特征多项式 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}6-\lambda&2&4\\2&3-\lambda&2\\4&2&6-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-11)=0$

得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$， $\lambda_3=11$

将 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 代入到方程 $(A-\lambda E)X=0$ 得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$， $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

再 用 Schimidt 方 法 将 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$， $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 正 交 规 范 化 化 ， 得

$P_1=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$， $P_2=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix}$ 。

将 $\lambda_3=11$ 代入到方程组 $(A-\lambda E)X=0$ 中，得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$，单位化得

$P_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$。令 $P=\left(P_1P_2P_3\right)$ 于是

二次型标准形 ： $f(x_1,x_2,x_3=2y_1^2+2y_2^2+11y_3^2$ ， 所用正交变换 X=PY 。

由于二次形的标准形的正惯性指数是 3，所以二次型为正定的。

方法二：（用配方法化二次型为标准形）

$$f(x_1,x_2,x_3)=6x_1^2+3x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3 \quad =$$

$$=6(x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3)^2+\frac{7}{3}x_2^2+\frac{4}{3}x_2x_3+\frac{10}{3}x_3=$$

$$=6(x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3)^2+\frac{7}{3}(x_2+\frac{2}{7}x_3)^2+\frac{22}{7}x_3^2$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3 \\ y_2=x_2+\frac{2}{7}x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$ ， 得可逆变换 $\begin{cases} x_1=y_1-\frac{1}{3}y_2+\frac{12}{21}y_3 \\ x_2=y_2-\frac{2}{7}y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

于是二次型的标准形为 ： $f(x_1,x_2,x_3)=6y_1+\frac{7}{3}y_2+\frac{22}{7}y_3$

方法三：（用初等变换法化二次型为标准形）

$$令 \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ 4 & \frac{2}{3} & \frac{10}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{10}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{66}{21} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{12}{21} \\ & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{66}{21} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{12}{21} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

得 到 二 次 型 的 标 准 形 ： $f(x_1,x_2,x_3)=6y_1+\frac{7}{3}y_2+\frac{66}{21}y_3$ 所 用 可 逆 变 换

$$X=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{12}{21} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$$

特别提示：这里三种方法化二次型为标准形所用的变换矩阵不同，标准形的系数也不同，

但是它们的正惯性指数是一样的。